

Rüdiger Kuhnke

**Mathematischer Vorkurs
zur Physik**

Die in diesem Skriptum behandelten Themen entsprechen etwa dem Niveau der Sekundarstufe I.

Version 0.2 vom 1.10.2008
Noch nicht vollständig korrigiert

Kontakt zum Autor: mailkuhnke@arcor.de

1 Funktionen.....	4
1.1 Definition einer Funktion.....	4
1.2 Wertetabelle und Funktionsgleichung.....	5
1.3 Der Graph einer Funktion.....	5
2 Lineare und quadratische Funktionen.....	8
2.1 Definition und Beispiele.....	8
2.2 Die Konstante m	9
2.3 Die Konstante b	11
2.4 Bestimmung der Geraden aus einer Funktionsgleichung.....	11
2.5 Bestimmung der Funktionsgleichung aus einer Geraden.....	12
2.6 Quadratische Funktionen.....	13
3 Trigonometrische Funktionen.....	14
3.1 Winkel, Grad und Radiant.....	14
3.2 Dreiecke und Pythagoras.....	15
3.3 Die trigonometrischen Funktionen.....	16
3.4 Seitenverhältnisse im Dreieck.....	18
3.5 Einige Beziehungen.....	18
3.6 Funktionswerte häufiger Winkel.....	20
3.7 Die Graphen.....	21
3.8 Periodizität der Winkelfunktionen.....	22
4 Exponenten und Logarithmen.....	23
4.1 Potenzen, Exponenten.....	23
4.2 Logarithmen.....	24
5 Weitere Funktionen.....	27
5.1 Die konstante Funktion.....	27
5.2 Die Funktion des Absolutbetrags.....	27
5.3 Die Funktion $y = x^{-1}$	28
5.4 Die kubische Parabel.....	28
5.5 Die Funktion $y = a^x$	28

Funktionen

1.1 Definition einer Funktion

1.2 Wertetabelle und Funktionsgleichung

1.3 Der Graph einer Funktion

1.1 Definition einer Funktion

Funktionen beschreiben die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen, z. B. die Abhängigkeit der Temperatur von der Tageszeit oder die Abhängigkeit der Fläche eines Rechtecks von den Längen seiner Seiten.

Beispiel 1: Es werde 24 Stunden lang alle 3 Stunden die Temperatur θ gemessen, dabei mögen sich folgende Meßwerte ergeben:

Uhrzeit t	0 h	3 h	6 h	9 h	12 h	15 h	18 h	21 h	24 h
Temperatur	8 °C	5 °C	6 °C	9 °C	13 °C	12 °C	10 °C	8 °C	5 °C

Jeder Uhrzeit ist *genau eine* Temperatur zugeordnet.

Beispiel 2: In der folgenden Tabelle ist die Abhängigkeit des Flächeninhalts A eines Quadrats von seiner Seitenlänge l dargestellt. Diese Abhängigkeit läßt sich durch die Gleichung $A = l^2$ beschreiben.

Seitenlänge l	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m
Fläche A	1 m ²	4 m ²	9 m ²	16 m ²	25 m ²

Auch hier ein wesentliches Merkmal: jedem Wert von l ist *genau ein* Wert von A zugeordnet.

Wird jedem Wert einer Größe x genau ein Wert einer anderen Größe y zugeordnet, so sagt man, y sei eine Funktion von x . Man verwendet die Schreibweise $y = f(x)$.¹

Man nennt x die *unabhängige Variable* oder *Argument* und y die *abhängige Variable* oder den *Funktionswert*. f ist die Funktion und $y = f(x)$ bezeichnet gewöhnlich die abhängige Variable.

Im ersten Beispiel würde man $\theta = f(t)$ schreiben, wobei die Zeit t die unabhängige und die Temperatur θ die (von t) abhängige Variable darstellt. Im zweiten Beispiel würde man $A = f(l)$ schreiben, die Seitenlänge l stellt die

¹ "y = f(x)" wird ausgesprochen als "y gleich f von x".

unabhängige und die Fläche A die (von l) abhängige Variable dar.

Es kann aber auch jedes andere Symbol für die Funktion und die Variablen verwendet werden. Beispielsweise sei die Größe z von der Größe r abhängig, dann könnte man $z = f(r)$ schreiben: z ist eine Funktion von r . Statt mit f könnte man die Funktion aber auch z. B. mit H bezeichnen, dann würde man $z = H(r)$ schreiben.

Wie die Bezeichnungen *unabhängige* und *abhängige* Variable schon andeuten, wird mit einer Funktion die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen dargestellt (wobei es sich jedoch nicht um eine kausale Abhängigkeit handeln muß). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *Zuordnung* der Werte zueinander.

1.2 Wertetabelle und Funktionsgleichung

Eine Möglichkeit der Darstellung einer Funktion ist die in den Beispielen schon gezeigte Auflistung der Zuordnung in einer Tabelle, der *Wertetabelle*. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine Regel anzugeben, nach der man für eine gegebene unabhängige Variable die abhängige Variable findet. Diese Regel liegt meist die Form einer Gleichung vor, man spricht daher auch von einer *Funktionsgleichung*. (Die Begriffe "Funktion", "Funktionsgleichung" und "Gleichung" werden oft synonym verwendet.) Ein Beispiel dafür war die Fläche A eines Rechtecks als Funktion der Seitenlänge l mit der Gleichung $A = l^2$. Eine Funktionsgleichung $s = 2t^2 + 6t$ könnte z. B. den von einem Körper zurückgelegten Weg s als Funktion der Zeit t beschreiben: $s = f(t)$.

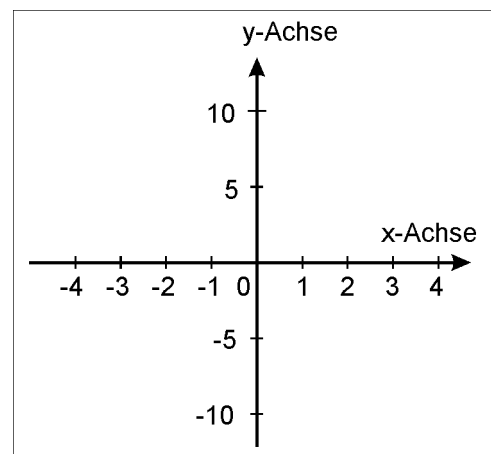
1.3 Der Graph einer Funktion

Das rechtwinklige Koordinatensystem

Ein *rechtwinkliges Koordinatensystem* erhält man aus einem Paar senkrecht aufeinander stehender Geraden, von denen die eine horizontal, die andere senkrecht verläuft. Die horizontale Gerade wird gewöhnlich die *horizontale Achse* oder *x-Achse* genannt und die vertikale die *vertikale Achse* oder *y-Achse*. Der Schnittpunkt heißt der *Nullpunkt* oder *Ursprung* des Koordinatensystems, die Achsen nennt man die *Koordinatenachsen*.

Der nächste Schritt besteht in der Wahl einer geeigneten Längeneinheit; vom Ursprung ausgehend zeichnet man auf der *x-Achse* eine Zahlenskala ein, die nach rechts positive und nach links negative Werte annimmt.

Ebenso verfährt man auf der *y-Achse*, wobei die positiven Zahlenwerte nach oben und die negativen nach unten aufgetragen werden. Der Maßstab kann (wie in der Abbildung gezeigt) auf beiden Achsen verschieden sein. Auch haben die *x-* und *y-Werte*



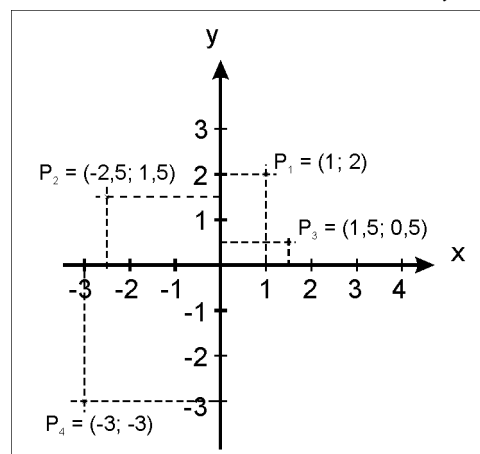
(sofern es sich nicht um reine Zahlen handelt) in der Regel verschiedene Maßeinheiten; in den behandelten Beispielen sind dies Zeiteinheiten auf der x -Achse und Temperaturangaben auf der y -Achse bzw. Längeneinheiten auf der x -Achse und Flächeneinheiten auf der y -Achse.

Ein solches rechtwinkliges Koordinatensystem nennt man auch *kartesisches* Koordinatensystem.

Darstellung von Wertepaaren im Koordinatensystem

In diesem Koordinatensystem läßt sich ein Punkt durch die Angabe eines Wertepaares $(x; y)$ genau festlegen. Die Schreibweise für den Punkt P_i ist $P_i = (x_i; y_i)$.²

Der Wert x_i wird auch der *x-Wert* von P_i oder die *Abszisse* genannt, während y_i der *y-Wert* oder die *Ordinate* von P_i genannt wird. (Gelegentlich werden auch die Achsen selbst als *Abszisse* und *Ordinate* bezeichnet.)



Vier Punkte im Koordinatensystem:
 $P_1 = (1; 2)$, $P_2 = (-2,5; 1,5)$, $P_3 = (1,5; 0,5)$,
 $P_4 = (-3; -3)$

Der Graph

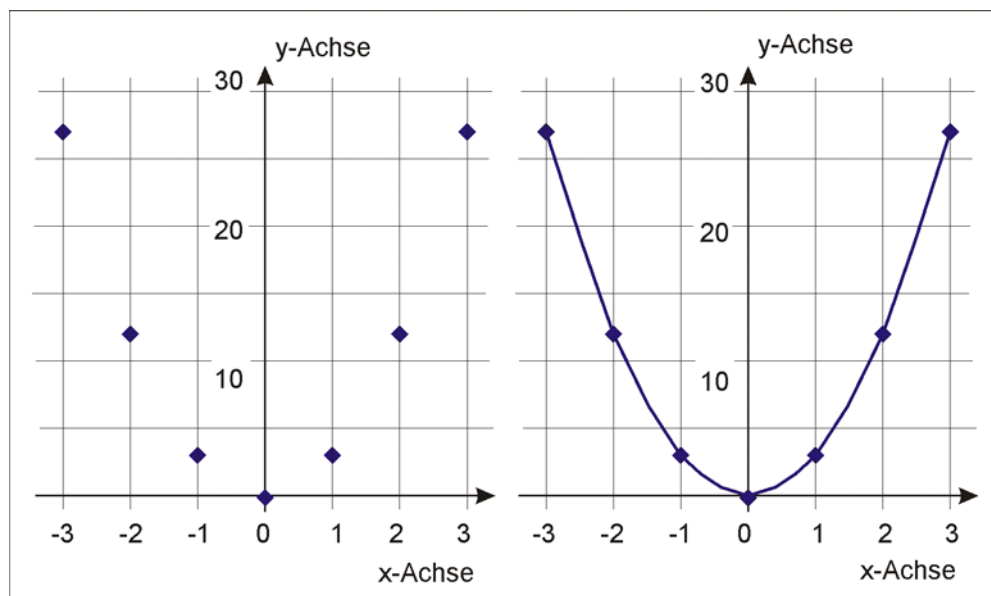
Die Wertetabelle einer Funktion $y = f(x)$ liefert mit jedem Wertepaar $(x; f(x))$ bzw. $(x; y)$ einen Punkt im Koordinatensystem. Man erhält so eine *graphische Darstellung* dieser Funktion. Die Gesamtheit *aller* durch die Funktionsgleichung definierten Punkte (also einschließlich der nicht explizit in der Wertetabelle aufgeführten) bilden den *Graphen* der Funktion.

Oft verbindet man die aus einer Wertetabelle erhaltenen Punkte durch eine Kurve. Natürlich werden die Punkte auf der Kurve nur eine Näherung sein; je genauer die Darstellung sein soll, desto mehr Punkte müssen eingetragen werden. Hat man beispielsweise eine Funktionsgleichung $y = 3x^2$ vorliegen, erhält man mit der Wertetabelle

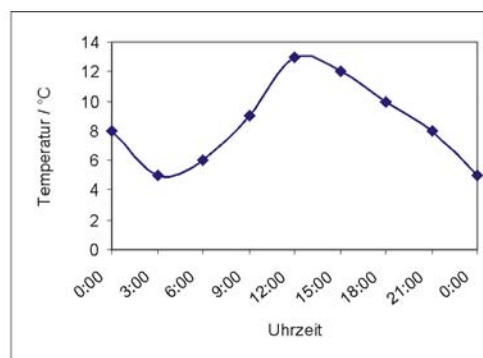
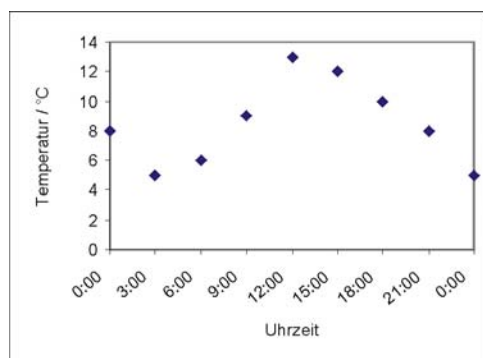
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$3x^2$	27	12	3	0	3	12	27

folgendes Bild (links die Punkte aus der Wertetabelle, rechts die durch Verbindung der Punkte erhaltene Ausgleichskurve):

² Man findet bei der Bezeichnung eines Punktes häufig (x_i, y_i) statt $(x_i; y_i)$. Verwendet man als Dezimalzeichen das Komma, so kann dies zu Problemen führen. In diesem Text wird die Schreibweise $(x_i; y_i)$ benutzt.

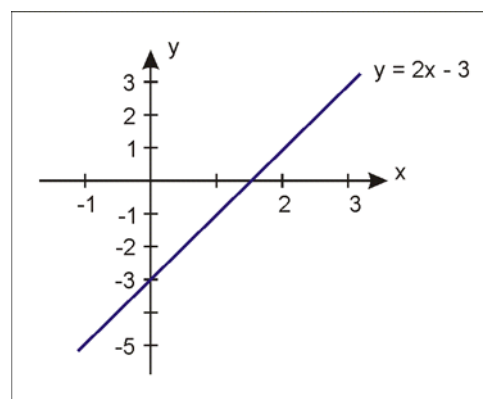


Im ersten Beispiel dieses Kapitels (Temperatur und Uhrzeit) liegt eine *empirische Funktion* vor, die nicht durch eine Funktionsgleichung bestimmt ist, sondern auf Messungen beruht. Wählen wir die Uhrzeit (die unabhängige Variable) als horizontale Achse und die Temperatur (die abhängige Variable) als vertikale Achse, so ergeben sich aus den Wertepaaren $(t; \theta)$ folgende Bilder ohne und mit Ausgleichskurve:



Die Funktionsgleichung $y = 2x - 3$ liefert die folgende Wertetabelle und die zugehörige Gerade: Funktionen dieser Art heißen *lineare Funktionen* und werden im folgenden Kapitel besprochen.

x	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3



Lineare und quadratische Funktionen

2.1 Definition und Beispiele

2.2 Die Konstante m

2.3 Die Konstante b

2.4 Bestimmung der Geraden aus einer Funktionsgleichung

2.5 Bestimmung der Funktionsgleichung aus einer Geraden

2.6 Quadratische Funktionen

2.1 Definition und Beispiele

In Funktionsgleichungen wie $y = 2x - 3$ oder $y = 3x + 5$ kommt die unabhängige Variable x nur in der ersten Potenz vor: als $x = x^1$. Sie kann jedoch auch in höheren Potenzen vorkommen, z. B. als x^2 oder x^3 in den Gleichungen für die Parabel bzw. die kubische Parabel.

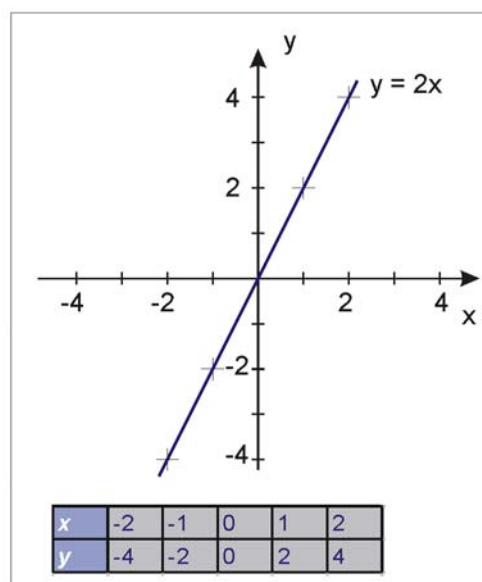
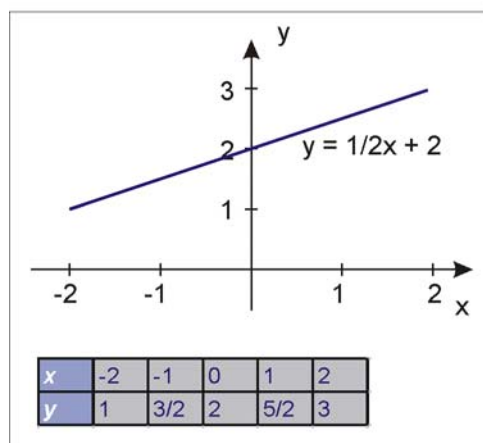
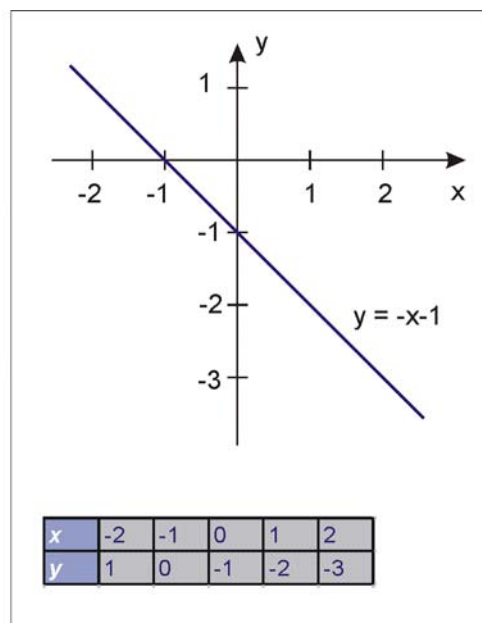
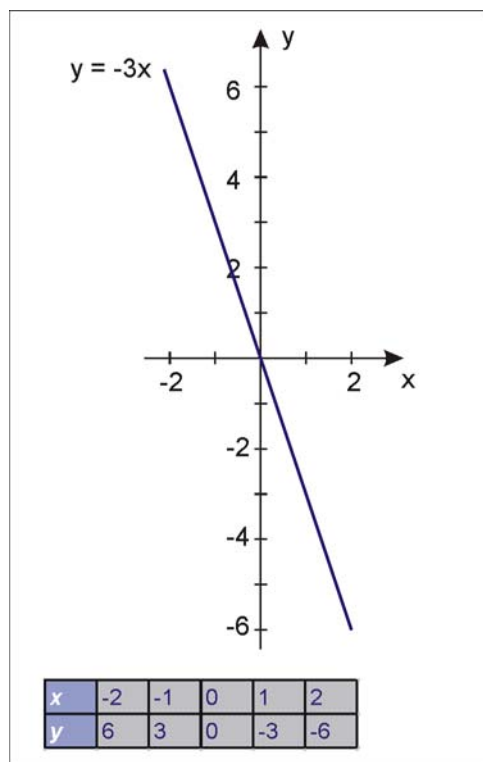
In diesem Kapitel werden hauptsächlich Funktionen behandelt, deren Gleichungen die unabhängige Variable *nur in der ersten Potenz* enthalten. Sie heißen *lineare Funktionen* und die entsprechenden *linearen Gleichungen* haben die allgemeine Form

$$y = mx + b,$$

wobei m und b Konstanten sind, deren Bedeutung in den folgenden Abschnitten diskutiert wird. Mit $b = 0$ reduziert sich die Gleichung auf

$$y = mx.$$

Der Graph linearer Funktionen ist stets eine Gerade, die im Falle $b = 0$ durch den Nullpunkt verläuft. Im Abschnitt 1.3 wurde eine solche Funktion schon vorgestellt, hier folgen vier weitere Beispiele für lineare Funktionen mit ihren zugehörigen Wertetabellen und den graphischen Darstellungen. Wie in der Praxis häufig vorkommend, findet man die Funktionsgleichung als Beschriftung des Graphen. Zwei der Geraden verlaufen von links unten nach rechts oben (man nennt dies *positive Steigung*, s. u.), die anderen beiden haben eine *negative Steigung*. In zweien der vier Beispiele ist $b = 0$.

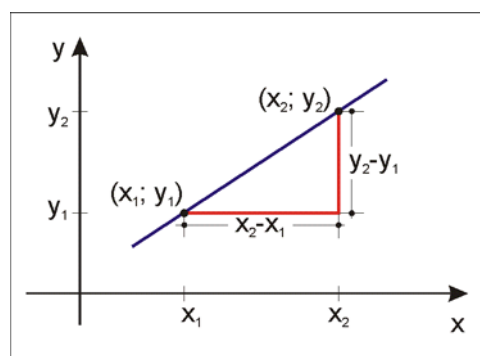


2.2 Die Konstante m

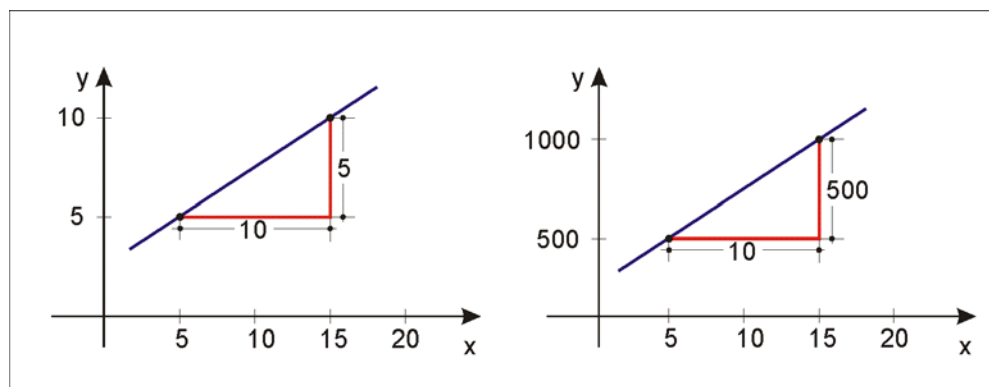
Wählt man auf einer Geraden im Koordinatensystem zwei beliebige Punkte $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$, so ist die *Steigung* der Geraden definiert als

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bei der Bestimmung der Steigung ist der Maßstab zu beachten: in der Abbildung rechts scheinen die Steigungen auf den ersten Blick ähnlich oder gleich zu sein, betrachtet man aber die Maßstäbe auf den Achsen, so er

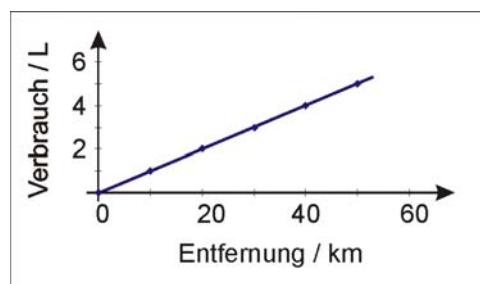


kennt man einen erheblichen Unterschied: im linken Bild beträgt die Steigung $5 : 10 = 0,5$, im rechten Bild beträgt sie $500 : 10 = 50$.

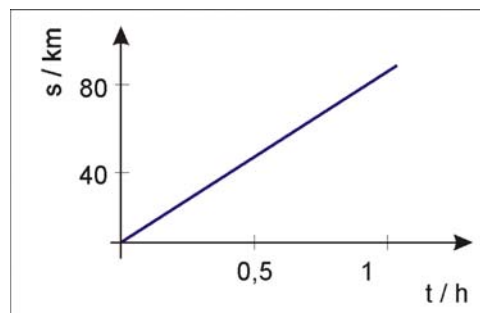


Zur Dimension der Steigung ist zu sagen: Sind die x - und y -Werte reine Zahlen, so ist natürlich auch die Steigung dimensionslos. Sind den Variablen aber verschiedene Dimensionen zu eigen, so hat auch die Steigung eine Dimension.

Beispiel 1: Die Abbildung zeigt den Benzinverbrauch eines Autos. Da die y -Werte in Liter und die x -Werte in Kilometer angegeben sind, hat die Steigung die Dimension Liter pro Kilometer (üblicherweise wird diese Angabe auf den Verbrauch pro 100 km normiert).



Beispiel 2: Die Abbildung zeigt die in Kilometern angegebene Position s eines Autos zu verschiedenen, in Stunden angegebenen, Zeiten t . (Die Position $s = 0$ stellt den Ausgangspunkt dar.) Die Steigung der Geraden hat die Dimension km/h, sie ist die Geschwindigkeit des Autos im Weg-Zeit-Diagramm.



Die lineare Gleichung ist durch $y = mx + b$ gegeben. Setzt man in

$$\text{Steigung} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

für y den Ausdruck $mx + b$ ein, so erhält man

$$\text{Steigung} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m.$$

In der Funktionsgleichung $y = mx + b$ stellt die Konstante m die Steigung der Geraden dar.

Eine Gerade mit positiver Steigung, d. h. $m > 0$, steigt von links nach rechts an. Eine Gerade mit negativer Steigung ($m < 0$) fällt von links nach rechts (vgl. die vier Beispiele in Abschnitt 2.1). Im Falle $m = 0$ verläuft die Gerade parallel zur x -Achse ($y = mx + b$ reduziert sich dann zu $y = b$ bzw. $y = \text{const}$).

2.3 Die Konstante b

Die y -Achse entspricht dem Wert $x = 0$. Setzt man dies in die Gleichung

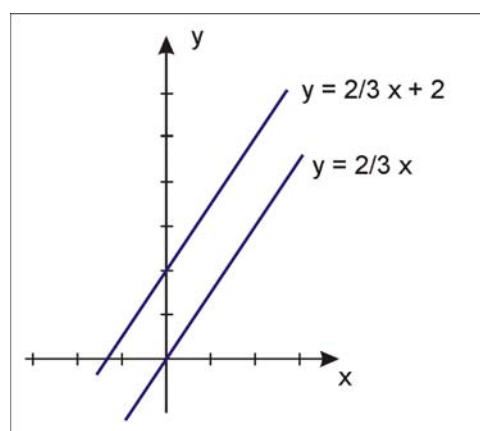
$$y = mx + b$$

ein, so erhält man

$$y = b,$$

das heißt: die Gerade schneidet die y -Achse im Punkt b .

In der Gleichung $y = mx + b$ ist die Konstante b der Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse.



Die Geraden der beiden Funktionsgleichungen $y = 2/3 x$ und $y = 2/3 x + 2$ sind Parallelen, d. h. beide haben dieselbe Steigung $m = 2/3$. Die der Funktionsgleichung $y = 2/3 x + 2$ entsprechende Gerade ist genau um den Wert b (hier 2) in positiver Richtung auf der y -Achse, also "nach oben" verschoben. Die Gerade der Gleichung $y = mx$ heißt *Ursprungsgerade* der $y = mx + b$ entsprechenden Geraden.

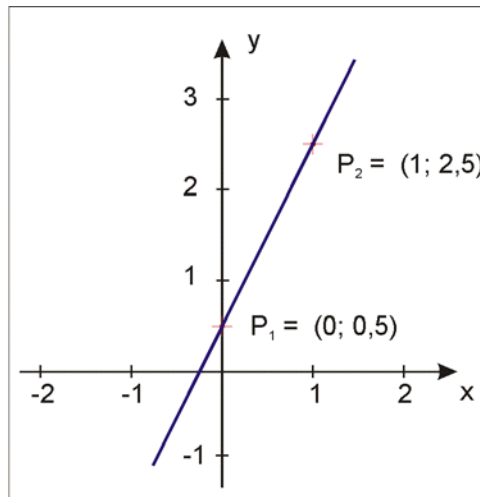
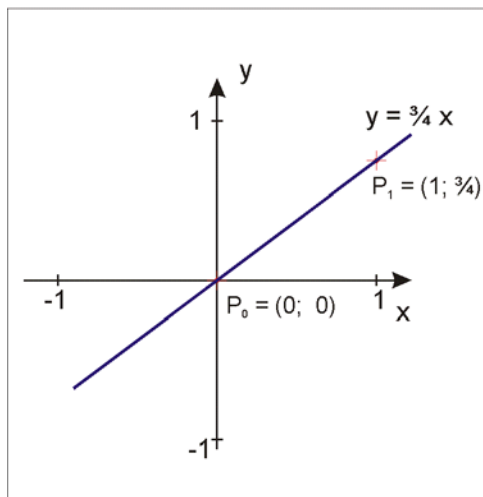
2.4 Bestimmung der Geraden aus einer Funktionsgleichung

Eine Gerade ist eindeutig durch zwei Punkte festgelegt. Sie lassen sich aus der Funktionsgleichung bestimmen.

Betrachten wir zunächst den einfachen Fall $y = mx$. Hier ist einer der beiden Punkte $(0; 0)$, denn die Gerade verläuft ja durch den Nullpunkt.

Um den zweiten Punkt zu finden, setzt man $x = 1$, dadurch reduziert sich die Gleichung auf $y = m$. Damit ist der zweiten Punkt als $(1; m)$ gegeben.

In der linken Abbildung der Funktionsgeraden $y = 3/4 x$ ist der Punkt $(0; 0)$ ohnehin klar, einen weiteren Punkt erhalten wir nach dem eben beschriebenen "Rezept" als Wertepaar $(1; 3/4)$.



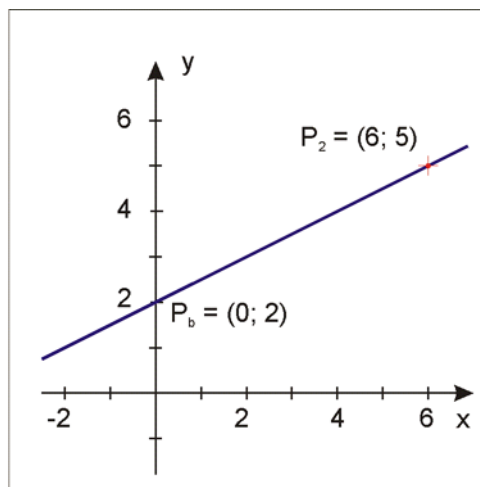
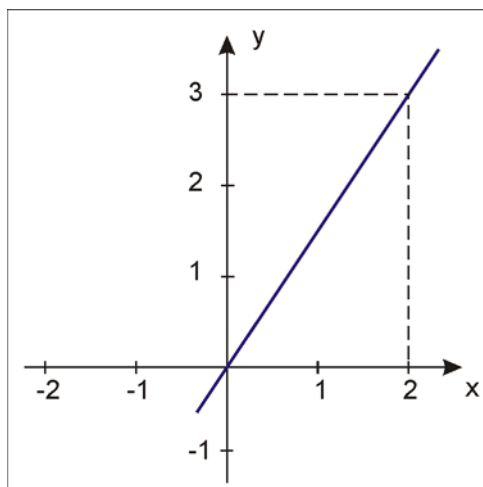
Im Falle $y = mx + b$ schneidet die Gerade die y -Achse in b , damit ist der Punkt $(0; b)$ festgelegt. Mit $x = 1$ gilt $y = m + b$, damit haben wir den zweiten Punkt $(1; m + b)$.

Die rechte Abbildung zeigt dies am Beispiel $y = 2x + 0,5$. Mit $b = 0,5$ ergibt sich der Punkt $(0; 0,5)$ und mit $m = 2$ ergibt sich der zweite Punkt $(1; m + b)$ zu $(1; 2 + 0,5) = (1; 2,5)$.

2.5 Bestimmung der Funktionsgleichung aus einer Geraden

Muß aus einer gegebenen Geraden die zugehörige Funktionsgleichung bestimmt werden, sollte man auf der Geraden Punkte finden, die sich möglichst genau ablesen lassen. Bei einer empirisch gewonnenen Geraden bieten sich die Meßwerte an.

Verläuft die Gerade durch den Nullpunkt, ist $b = 0$ und das Problem reduziert sich auf die Bestimmung der Steigung m . Zum gegebenen Punkt $(0; 0)$ brauchen wir nur einen weiteren Punkt zu suchen, dessen Koordinaten sich leicht ablesen lassen. Auf der linken Geraden bietet sich der Punkt $(2; 3)$ an. Damit ist



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

und wir erhalten die Gleichung

$$y = \frac{3}{2}x.$$

Im Falle $y = mx + b$ (rechtes Bild) kann b unmittelbar auf der y -Achse abgelesen werden, so daß $P_b = (0; b)$ gegeben ist. Mit einem weiteren, beliebigen Punkt $P_2 = (x_2; y_2)$ erhalten wir die Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2 - 0} = \frac{y_2 - b}{x_2}$$

Im rechten Beispiel ergibt sich mit $P_b = (0; 2)$ und $P_2 = (6; 5)$

$$m = \frac{y_2 - b}{x_2} = \frac{5 - 2}{6} = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir die Gleichung der Geraden als $y = \frac{1}{2}x + 2$ erhalten.

2.6 Quadratische Funktionen

Eine Funktion mit einer Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$, in der a , b , und c Konstanten sind und die unabhängige Variable in der zweiten Potenz vorkommt, nennt man eine *quadratische Funktion*³; ihre graphische Darstellung ist eine *Parabel*.

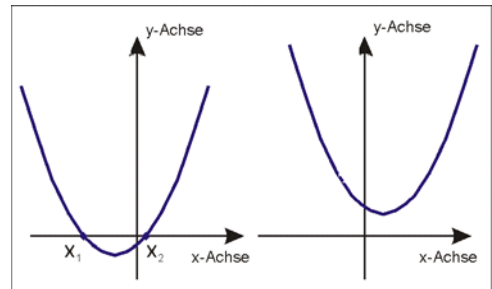
Die in der linken Parabel durch x_1 und x_2 bezeichneten Werte von x in $y = 0$ entsprechen den Werten von x , die die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ erfüllen; man nennt sie die *Wurzeln*, *Nullstellen* oder *Lösungen* der Gleichung. Nicht alle quadratischen Gleichungen haben reelle Wurzeln. Die rechte Parabel stellt eine solche Gleichung dar.

Die Formel zur Berechnung der Nullstellen ist der *Vietasche Wurzelsatz*:

Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat zwei Wurzeln, die durch

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben sind.



³ Im Abschnitt über Graphen im Kapitel 1 haben wir schon eine quadratische Funktion kennengelernt: $y = 3x^2$. Dort war $a = 3$ und $b = c = 0$.

Trigonometrische Funktionen

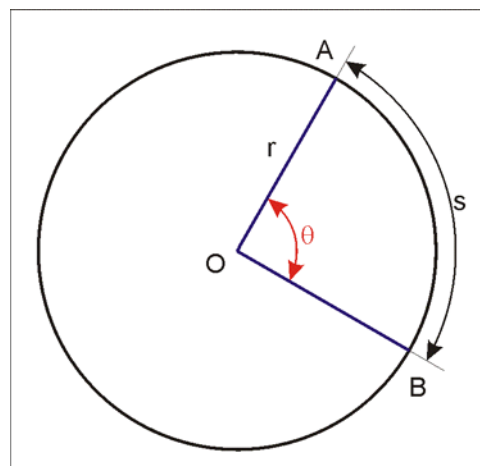
- 3.1 Winkel, Grad und Radiant
- 3.2 Dreiecke und Pythagoras
- 3.3 Die trigonometrischen Funktionen
- 3.4 Seitenverhältnisse im Dreieck
- 3.5 Einige Beziehungen
- 3.6 Funktionswerte häufiger Winkel
- 3.7 Die Graphen
- 3.8 Periodizität der Winkelfunktionen

3.1 Winkel, Grad und Radiant

Winkel werden im Alltagsgebrauch meist in *Grad* ($^{\circ}$) angegeben, in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist außerdem die Angabe in *Radiant* (rad) üblich.

Die Einheit *Grad*: Ein Kreis wird in 360 gleiche Winkel eingeteilt, jeder dieser Winkel beträgt 1° (1 Grad)⁴. Ein Kreis enthält vier rechte Winkel zu 90° , der Halbkreis bildet einen Winkel von 180° .

Die Einheit *Radiant*: Um die Größe eines Winkels in Radiant (rad) zu finden, zeichnen wir um den Scheitelpunkt O des Winkels einen Kreis mit dem Radius r , der die Seiten des Winkels in zwei Punkten A und B schneidet. s ist die Länge des Kreisbogens (die *Bogenlänge*) zwischen A und B . Dann ist



$$\theta \text{ (in rad)} = \frac{s}{r} = \frac{\text{Länge des Bogens}}{\text{Radius}}$$

Da das Verhältnis von Umfang zu Radius 2π beträgt, gilt $U = 2\pi r$, und der Winkel des Vollkreises, gemessen in rad, beträgt

⁴ Jeder Grad wird weiter unterteilt in 60 Bogenminuten ($60'$) und jede Bogenminute wieder in 60 Bogensekunden ($60''$). Wenn Verwechslungen mit Zeitangaben ausgeschlossen sind, kann man auch Minuten bzw. Sekunden sagen.

$$\theta = \frac{U}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Der Halbkreis bildet einen Winkel von π rad, der rechte Winkel beträgt $\frac{\pi}{2}$ rad. Mit 2π rad = 360° ergibt sich für die Umwandlung von Grad in Radiant

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$$

und umgekehrt

$$1 \text{ Grad} = \frac{2\pi \text{ rad}}{360}$$

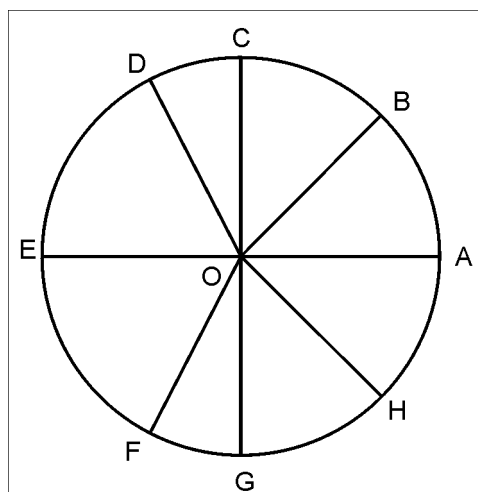
In dem abgebildeten Kreis steht CG senkrecht auf AE . Es ist

$$\text{arc } AB = \text{arc } BC = \text{arc } AH$$

und

$$\text{arc } AD = \text{arc } DF = \text{arc } FA.$$

„arc AB “ bedeutet die Bogenlänge zwischen A und B , und zwar entlang des kürzesten Weges. In der Geometrie bezeichnet man Winkel oft mit drei Buchstaben, wobei der mittlere Buchstabe der Scheitelpunkt ist, z. B. würde man den aus den Strecken \overline{AO} und \overline{OB} gebildeten Winkel als $\angle AOB$ schreiben.

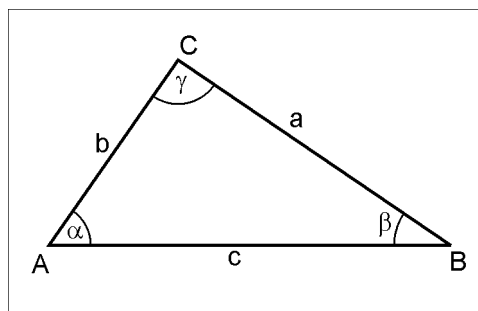


3.2 Dreiecke und Pythagoras

Vereinbarungsgemäß werden die Ecken eines Dreiecks mit den lateinischen Großbuchstaben A, B, C bezeichnet, und zwar links unten beginnend entgegen dem Uhrzeigersinn.

Die von den Ecken A, B und C eingeschlossenen Winkel werden mit den griechischen Kleinbuchstaben α, β und γ bezeichnet und die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten mit den lateinischen Kleinbuchstaben a, b und c .

Im rechtwinkligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *Hypotenuse*. Die anderen beiden Seiten heißen *Katheten*. In Bezug auf einen bestimmten Winkel werden die Katheten unterschieden in *Ankathete* und *Gegenkathete*: bezogen auf den

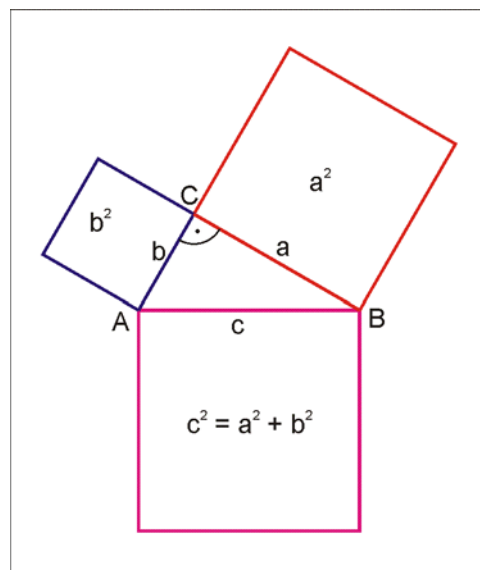


Winkel α ist b die Ankathete (sie liegt *an* dem Winkel) und a die Gegenkathete (sie liegt dem Winkel *gegenüber*). Bezogen auf β ist a die Ankathete und b die Gegenkathete.

Einer der wichtigsten Sätze der Geometrie ist der *Satz des Pythagoras*:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den beiden Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

Der Satz des Pythagoras erlaubt unter anderem die Berechnung einer Seitenlänge, wenn die Längen der anderen beiden Seiten gegeben sind.



Beispiel: Die Länge der Hypotenuse c betrage 14 cm, die der Kathete a 10 cm. Wie lang ist die Kathete b ?

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2, \text{ also } b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

$$b = \sqrt{14^2 \text{ cm}^2 - 10^2 \text{ cm}^2} = \sqrt{(196 - 100) \text{ cm}^2} = \sqrt{96 \text{ cm}^2} \approx 9,8 \text{ cm}$$

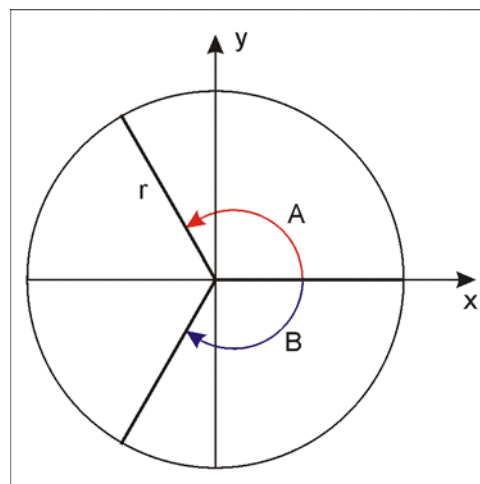
3.3 Die trigonometrischen Funktionen

Die Abbildung rechts zeigt einen Kreis mit dem Radius r um den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

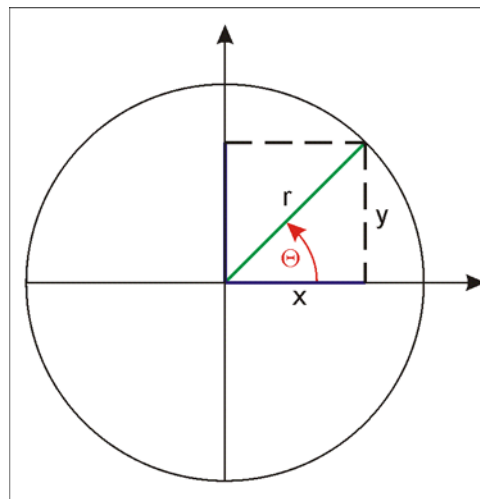
Die positive x -Achse sei die Bezugslinie, d. h. von dieser Linie aus werden die Winkel gemessen. Ein Winkel, der durch Drehung von r gegen den Uhrzeigersinn gebildet wird, ist positiv (rot gezeichnet); ein Winkel, der durch eine Drehung im Uhrzeigersinn entsteht, ist negativ (blau dargestellt). In der Abbildung ist der Winkel A positiv und der Winkel B negativ.

Die *trigonometrischen Funktionen* oder *Winkelfunktionen* von θ lassen sich wie folgt durch die Koordinaten x und y sowie den Radius des Kreises

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoras!) definieren:



Sinus : $\sin \theta = \frac{y}{r}$
Cosinus : $\cos \theta = \frac{x}{r}$
Tangens : $\tan \theta = \frac{y}{x}$
Cotangens : $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{x}{y}$
Secans : $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}$
Cosecans : $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{y}$



Aus y/r , x/r , y/x (für \sin , \cos , \tan) läßt sich das Merkwort $yrxryx$ („ürxrüx“) bilden. Damit kann man, wenn man die entsprechende Skizze im Gedächtnis hat, Sinus, Cosinus und Tangens rekapitulieren. Der Cotangens ist der Kehrwert des Tangens.

Mit $y = r \sin \theta$ und $x = r \cos \theta$ kann man den Tangens

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \quad \text{auch schreiben als} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Um die Entfernung von Sternen zu bestimmen, macht man sich die Tatsache zunutze, daß der Radius der Erdbahn eine Seite eines großen rechtwinkligen Dreiecks bildet. Im Abstand von 6 Monaten, also an gegenüberliegenden Punkten der Erdbahn, wird die Position des betreffenden Sterns vermessen, d. h. es wird der Winkel γ bestimmt.

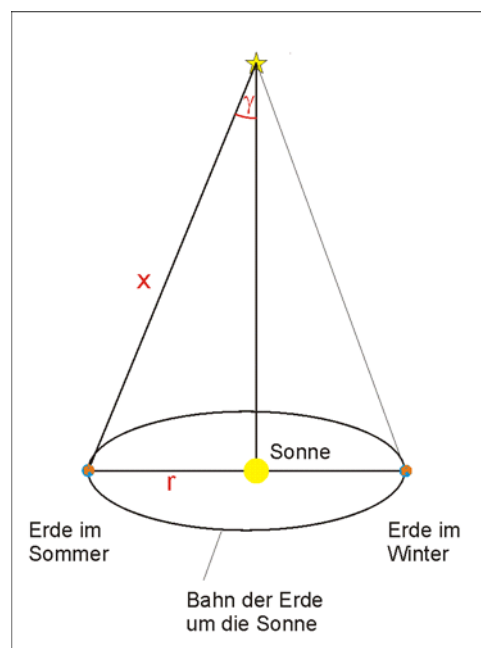
Der Radius r der Erdbahn bildet bezüglich des Winkels γ die Gegenkathete im rechtwinkligen Dreieck Erde – Sonne – Stern. Für den Stern Sirius beispielsweise beträgt $\gamma = 0,379'' = 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ$. Der Radius der Erdbahn beträgt $r = 1,49 \cdot 10^8 \text{ km}$. Mit

$$\sin \gamma = \frac{r}{x}$$

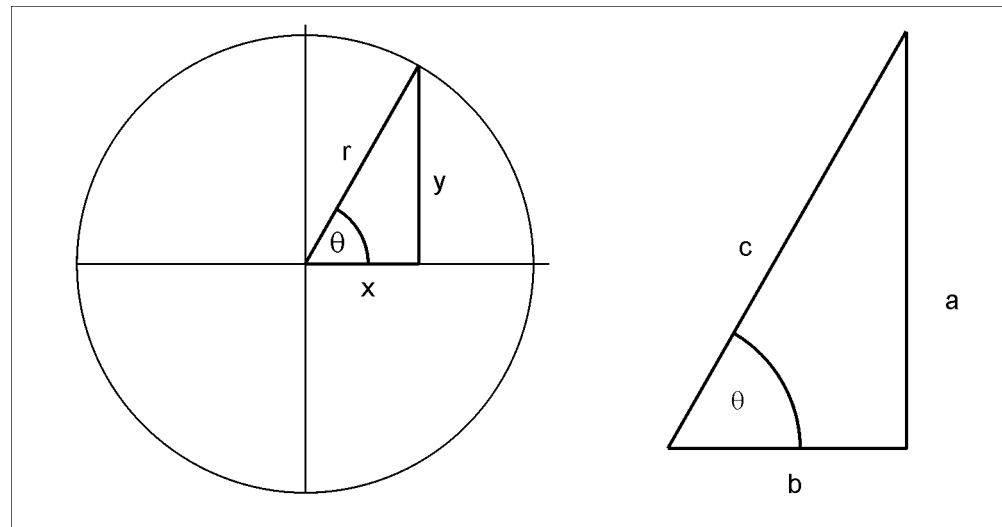
ergibt sich die Entfernung zu

$$x = \frac{r}{\sin \gamma} = \frac{1,49 \cdot 10^8 \text{ km}}{1,84 \cdot 10^{-6}} \approx 8,11 \cdot 10^{13} \text{ km}.$$

Das sind rund 8,6 Lichtjahre. Der Winkel γ heißt in der Astronomie *Parallaxe*. Beträgt er eine Bogensekunde, so ist der Stern 3,26 Lichtjahre von der Erde entfernt; diese Entfernung heißt 1 *Parallaxensekunde*, kurz *Parsec* (1 pc).



3.4 Seitenverhältnisse im Dreieck



Die oben definierten trigonometrischen Funktionen lassen sich auch durch die Seiten a , b , c (Gegenkathete, Ankathete, Hypotenuse) eines rechtwinkligen Dreiecks ausdrücken (die Seiten a , b , c entsprechen den Größen y , x , r):

$$\begin{aligned}\sin \theta &= a/c = \text{Gegenkathete} / \text{Hypotenuse} \\ \cos \theta &= b/c = \text{Ankathete} / \text{Hypotenuse} \\ \tan \theta &= a/b = \text{Gegenkathete} / \text{Ankathete} \\ \cot \theta &= b/a = \text{Ankathete} / \text{Gegenkathete} \\ \sec \theta &= c/b = \text{Hypotenuse} / \text{Ankathete} \\ \csc \theta &= c/a = \text{Hypotenuse} / \text{Gegenkathete}\end{aligned}$$

3.5 Einige Beziehungen

Die Abbildung zeigt sowohl θ als auch $-\theta$. Die trigonometrischen Funktionen dieser beiden Winkel stehen in einfacher Beziehung zueinander.

Beim negativen Winkel $-\theta$ ist y negativ und x positiv, und da r stets positiv ist, gilt

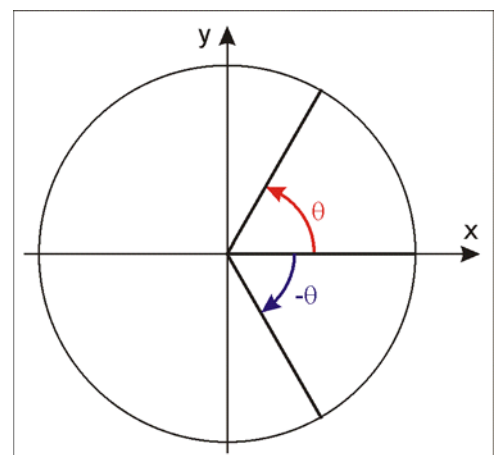
$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin \theta.$$

Für den Cosinus hingegen ergibt sich

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta,$$

und schließlich gilt

$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan \theta.$$



$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

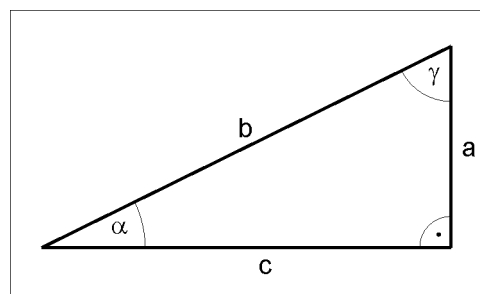
Verwendet man $x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras), so erhält man

$$\sin^2 \theta = \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^2} = 1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 - \cos^2 \theta.^5$$

Daraus ergibt sich die wichtige Beziehung

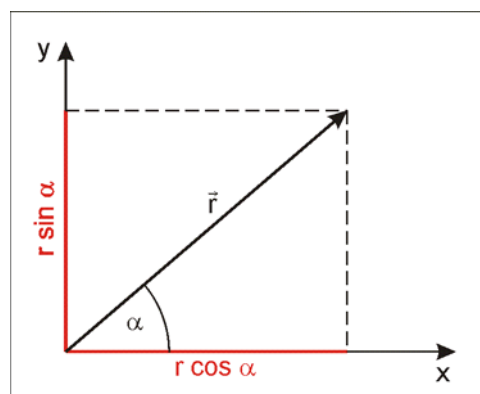
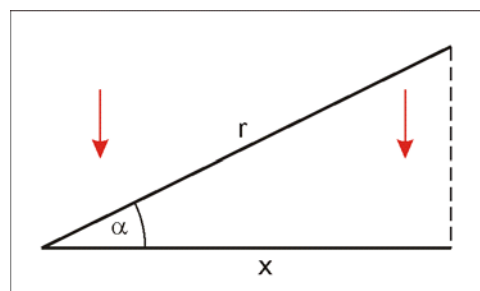
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Der Cosinus von α im dargestellten Dreieck ist $\cos \alpha = c/b$. Bezogen auf den Winkel γ ist c die Gegenkathete, so daß $\sin \gamma = c/b$ gilt. Damit ist $\cos \alpha = \sin \gamma$. Da die Summe aller Winkel im Dreieck 180° beträgt, gilt $\alpha + \gamma = 90^\circ$ bzw. $\gamma = 90^\circ - \alpha$. Somit erhalten wir



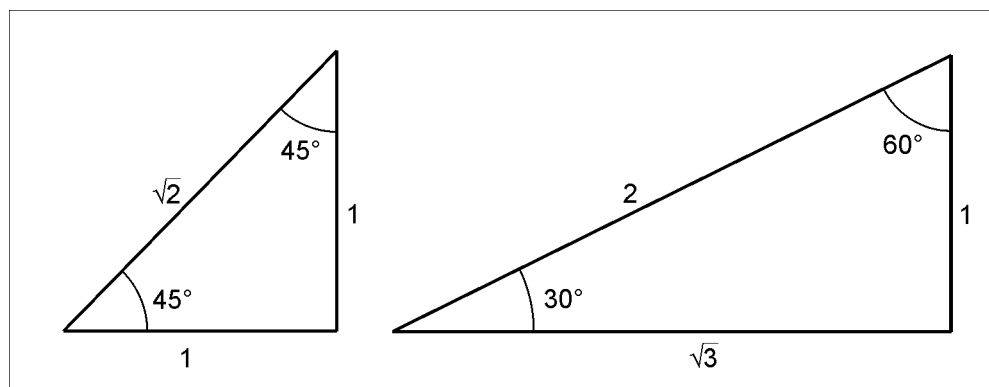
$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Eine wichtige Beziehung ist die Darstellung der Projektion von Strecken mittels der Winkelfunktionen. Zum Beispiel ist die Projektion von r auf die x -Achse $r \cdot \cos \theta$. Entsprechend ist die Projektion von r auf die y -Achse gegeben durch $r \cdot \sin \theta$. Mit Hilfe dieser Beziehung lassen sich die Komponenten eines Vektors (z. B. eines Kraftvektors) längs der Koordinatenachsen zerlegen.



⁵ Das Quadrat von $\sin \theta$ schreibt man nicht $\sin \theta^2$ oder $(\sin \theta)^2$, sondern $\sin^2 \theta$. $\sin \theta^2$ wäre der Sinus des Quadrats von θ .

3.6 Funktionswerte häufiger Winkel



Die Funktionswerte für 45°

Im linken Dreieck haben für jeden der beiden 45° -Winkel die Gegenkathete (G) und die Ankathete (A) jeweils die Länge 1, die Hypotenuse (H) hat die Länge $\sqrt{2}$. Damit ergeben sich für die Funktionswerte

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= G/H = 1/\sqrt{2} \approx 0,71 \\ \cos 45^\circ &= A/H = 1/\sqrt{2} \approx 0,71 \\ \tan 45^\circ &= G/A = 1\end{aligned}$$

Die Funktionswerte für 30°

Im rechten Dreieck hat für den Winkel 30° die Gegenkathete (G) die Länge 1, die Ankathete (A) die Länge $\sqrt{3}$, und die Hypotenuse (H) die Länge 2. Damit ergeben sich für die Funktionswerte

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= G/H = 1/2 \\ \cos 30^\circ &= A/H = \sqrt{3}/2 (\approx 0,87) \\ \tan 30^\circ &= G/A = 1/\sqrt{3} (\approx 0,58)\end{aligned}$$

Die Funktionswerte für 60°

Im rechten Dreieck hat für den Winkel 60° die Gegenkathete (G) die Länge $\sqrt{3}$, die Ankathete (A) die Länge 1, und die Hypotenuse (H) die Länge 2. Damit ergeben sich für die Funktionswerte

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= G/H = \sqrt{3}/2 \\ \cos 60^\circ &= A/H = 1/2 \\ \tan 60^\circ &= G/A = \sqrt{3} (\approx 1,73)\end{aligned}$$

Auch die Werte für 0° und 90° sollten geläufig sein (vgl. die Graphen im folgenden Abschnitt); insgesamt ergibt sich als Überblick die folgende Tabelle:

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-

Hier eine „Eselsbrücke“ aus halbierten Wurzeln. Liest man diese Tabelle von hinten, wird der Cosinus gleich mitgeliefert.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}$

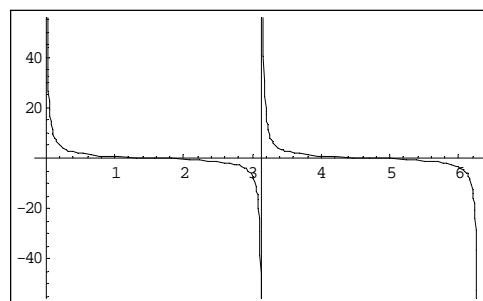
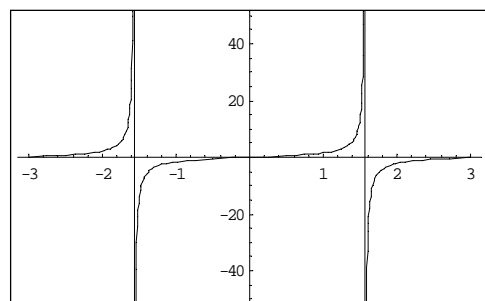
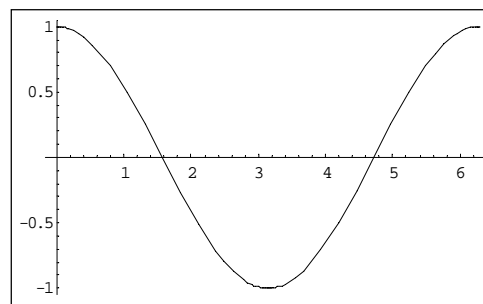
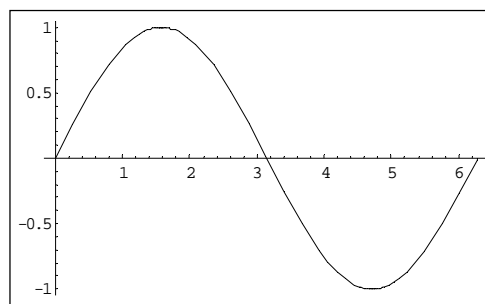
3.7 Die Graphen

Der Graph der Sinusfunktion beginnt bei Null, um dann bis 90° ($\pi/2$) anzusteigen. Dort erreicht er seinen größten Wert mit 1.

Danach fällt er ab, bis er bei π (180°) Null wird, um dann negative Werte anzunehmen (er wird jetzt durch negative Winkel erzeugt).

Der Graph der Cosinusfunktion ist genau gegenläufig: er beginnt bei 0° mit dem Wert 1, um dann bis $\pi/2$ auf den Wert Null abzufallen. Danach wird er negativ, um bei 270° wieder positive Werte anzunehmen, bis er nach einer vollen Umdrehung, also nach 2π , wieder bei 1 angekommen ist.

Charakteristisch am Graphen der Tangensfunktion sind seine Polstellen bei $\pi/2$ bzw. $-\pi/2$. Der Graph der Cotangensfunktion hat seine Polstellen bei Null und bei π .

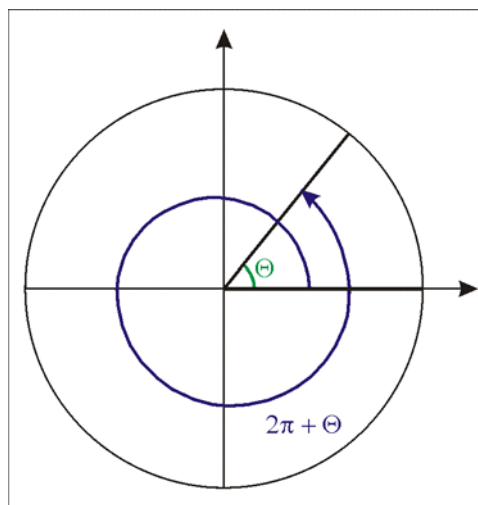


3.8 Periodizität der Winkelfunktionen

Bezüglich der trigonometrischen Funktionen ist der Winkel $\theta + 2\pi$ ($= \theta + 360^\circ$) äquivalent zu θ , d. h. der Funktionswert (egal ob sin, cos, tan etc.) ist für $\theta + 2\pi$ genau so groß wie für θ . Wir können also zu jedem Winkel 2π hinzufügen, ohne den Wert der Funktionen zu verändern.

Beispiele:

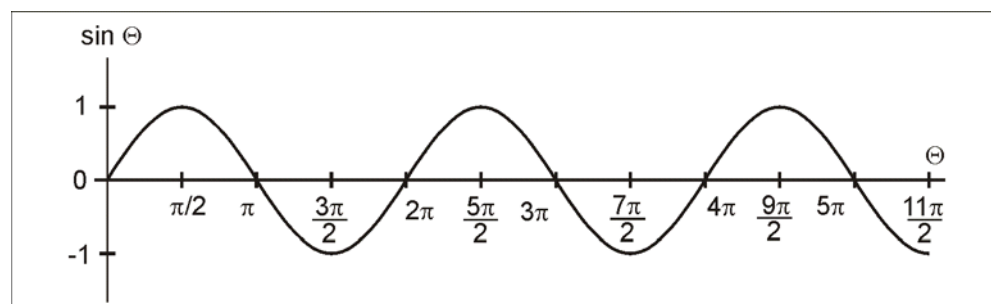
$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= 0,5; \quad \sin (30^\circ + 360^\circ) = 0,5 \\ \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos (45^\circ + 360^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 60^\circ &= \sqrt{3}; \quad \tan (60^\circ + 360^\circ) = \sqrt{3}.\end{aligned}$$



Man sagt daher, sin und cos sind *in θ periodisch* und ihre *Periode* beträgt 2π . Darüber hinaus sind tan und cot ebenfalls periodisch, aber ihre Periode ist π . (Zur Erinnerung: π ist der Halbkreis, 180° .)

$$\begin{aligned}\text{Beispiele:} \quad \tan 30^\circ &= 1/\sqrt{3}; & \tan (30^\circ + 180^\circ) &= 1/\sqrt{3} \\ \cot 30^\circ &= \sqrt{3}; & \cot (30^\circ + 180^\circ) &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung der Graph der Sinusfunktion: nach jeweils 2π wiederholen sich die Funktionswerte.



Exponenten und Logarithmen

4.1 Potenzen, Exponenten

4.2 Logarithmen

4.1 Potenzen, Exponenten

Ein Produkt $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ von m gleichen Faktoren a wird als a^m geschrieben, als m -te *Potenz* von a . a^m wird gesprochen als "a hoch m". m heißt *Exponent*, a heißt *Basis*. Beispielsweise ist

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 10^2 = 10 \cdot 10.$$

Ferner ist $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (für $a \neq 0$) festgelegt, also $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}$. Es ist leicht ersichtlich, daß

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$$

$$a^0 = a^{(m-m)} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m$$

Gebrochene und irrationale Exponenten

Ist $b^n = a$, dann nennt man b die n -te *Wurzel* aus a und schreibt $b = a^{1/n}$. Beispielsweise ist $2^4 = 16$, also ist 2 die vierte Wurzel aus 16. Man schreibt dafür auch $2 = 16^{1/4}$ oder $2 = \sqrt[4]{16}$.

Ebenso kann man $a^{1/2}$ statt \sqrt{a} schreiben. Wenn m und n ganze Zahlen sind, ist $a^{m/n} = a^{1/n \cdot m} = (a^{1/n})^m$. Beispielsweise ist

$$8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4.$$

Was bisher über die Exponenten gesagt wurde, gilt auch für irrationale Zahlen, und die oben gezeigten Beziehungen gelten auch für solche Exponenten. Ein Beispiel:

$$\frac{a^\pi a^x}{a^e} = a^{\pi+x-e}$$

4.2 Logarithmen

Dekadische Logarithmen

$\log x$, der *Logarithmus* von x zur Basis 10 ist durch

$$10^{\log x} = x$$

definiert. Das besagt, daß der Logarithmus einer Zahl x die Potenz ist, zu der 10 erhoben werden muß, um die Zahl x selbst zu erhalten. Diese Definition gilt nur für $x > 0$. Beispiele:

$$\begin{aligned} 100 &= 10^2, \text{ daher } \log 100 = 2 \\ 0,001 &= 10^{-3}, \text{ daher } \log 0,001 = -3. \end{aligned}$$

Herleitung einiger Regeln

Wegen $a = 10^{\log a}$ und $b = 10^{\log b}$ gilt

$$a \cdot b = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{(\log a + \log b)}.$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung den Logarithmus, so erhält man

$$\log ab = \log 10^{(\log a + \log b)}$$

und wegen $\log 10^x = x$ gilt

$$\mathbf{\log ab = \log a + \log b}$$

In ähnlicher Weise sieht man

$$a / b = 10^{\log a} \cdot 10^{-\log b} = 10^{(\log a - \log b)},$$

so daß schließlich

$$\mathbf{\log (a/b) = \log a - \log b}.$$

Ebenso ist

$$a^n = (10^{\log a})^n = 10^{n \cdot \log a}$$

und logarithmieren auf beiden Seiten zeigt schließlich

$$\mathbf{\log a^n = n \cdot \log a.}$$

Logarithmen zu anderen Basen

Neben der Basis 10 kann jede beliebige positive Zahl außer 1 als Basis dienen.

Ist die Basis nicht 10, so wird sie gewöhnlich als unterer Index angegeben. Beispielsweise wird der Logarithmus 8 zur Basis 2 in der Form $\log_2 8$ geschrieben. Der Wert dieses Logarithmus ist 3, denn $2^3 = 8$.

Wird die Basis mit r bezeichnet, lautet die Gleichung, die $\log_r x$ bezeichnet

$$r^{\log_r x} = x.$$

Die oben gezeigten Beziehungen $\log ab$, $\log a/b$ und $\log a^n$ gelten für jede beliebige Basis. (Innerhalb einer Gleichung müssen natürlich alle Logarithmen dieselbe Basis haben.)

Logarithmen zur Basis e (Natürliche Logarithmen)

Neben der Basis 10 trifft man die Eulersche Zahl $e = 2,718281828459\dots$ als Basis an (e ist, ebenso wie π eine transzendente Zahl). Laut Definition des Logarithmus ist

$$x = e^{\log_e x}.$$

Logarithmen zur Basis e heißen auch *natürliche Logarithmen* und werden mit dem Symbol $\ln x$ bezeichnet:

$$\ln x := \log_e x.$$

Entsprechend gibt es für die *dekadischen Logarithmen* $\log_{10} x$ die Bezeichnung $\lg x$:

$$\lg x := \log_{10} x.$$

Man bilde auf beiden Seiten von $x = e^{\log_e x}$ den Logarithmus zur Basis 10:

$$\lg x = \lg e^{\ln x}.$$

Die rechte Seite der Gleichung kann mittels $\log x^n = n \log x$ vereinfacht werden. Somit erhalten wir

$$\lg x = \ln x \cdot \lg e$$

oder

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\lg e} \approx \frac{1}{\lg 2,718} = \frac{1}{0,4343} \approx 2,303$$

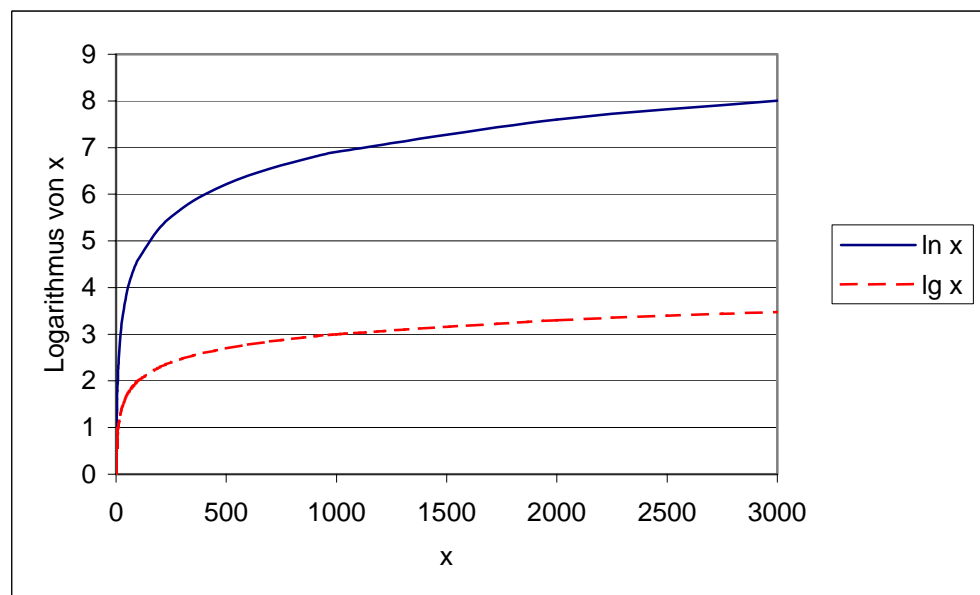
und daher

$$\ln x \approx 2,303 \lg x.$$

In der folgenden Tabelle ist $\ln x$ für einige x -Werte angegeben:

x	1	2	e	3	10	30	100	300	1000	3000
$\ln x$	0,00	0,69	1,00	1,10	2,30	3,40	4,61	5,70	6,91	8,01

Hier zum Vergleich die Graphen von $\ln x$ und $\lg x$:

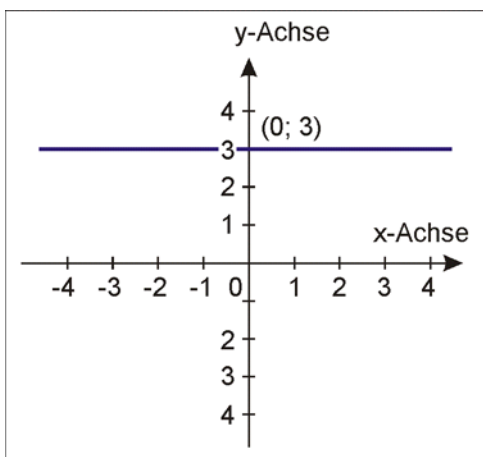


Weitere Funktionen

- 5.1 Die konstante Funktion
- 5.2 Die Funktion des Absolutbetrags
- 5.3 Die Funktion $y = x^{-1}$
- 5.4 Die kubische Parabel
- 5.5 Die Funktion $y = a^x$

5.1 Die konstante Funktion

Eine spezielle Funktion, die konstante Funktion, ordnet allen Werten der unabhängigen Variablen x die feste Zahl c zu, d. h. $f(x) = c$. Die graphische Darstellung der konstanten Funktion ist eine parallel zur x -Achse verlaufende gerade Linie, die durch den Punkt $(0; c)$ geht. Es handelt sich um eine lineare Funktion, deren Steigung $m = 0$ beträgt. Als Beispiel ist hier der Graph von $y = f(x) = 3$ gezeigt.



5.2 Die Funktion des Absolutbetrags

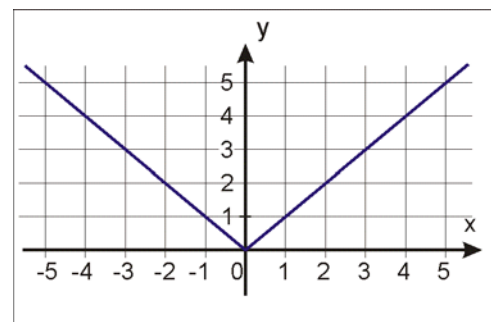
Der Absolutbetrag $|x|$ einer Zahl x bestimmt den Wert einer Zahl unabhängig von ihrem Vorzeichen. Zum Beispiel gilt

$$|-3| = |3| = 3.$$

Die allgemeine Definition der Funktion des Absolutbetrags ist

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

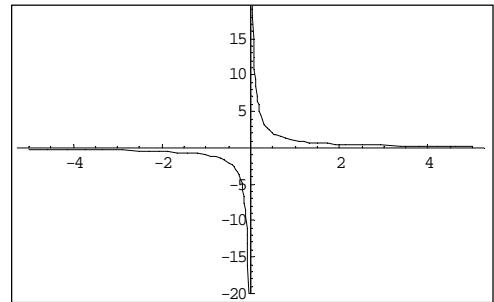
x	-4	-2	0	2	4
y	4	2	0	2	4



5.3 Die Funktion $y = x^{-1}$

Für $x = 0$ ist die Funktion $y = 1/x$ nicht definiert. Der aus zwei *Ästen* bestehende Graph von $y = 1/x$ heißt *Hyperbel*. Die Koordinatenachsen sind die *Asymptoten* der Hyperbel; die Äste nähern sich ihnen immer weiter an, ohne sie jemals zu berühren. Jede Funktionsgleichung der Form $y = c/x$ (c ist eine beliebige reelle Zahl) liefert eine Hyperbel.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-0,25	-0,5	-1	-	1	0,5	0,25

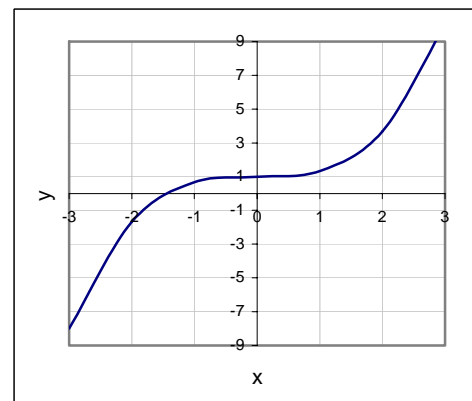


5.4 Die kubische Parabel

Kommt in einer Funktionsgleichung x^3 vor, so erhält man eine *Parabel 3. Ordnung* oder *kubische Parabel*. Die einfachste Form der kubischen Parabel ist $y = x^3$.

In diesem Beispiel lautet die Funktionsgleichung $y = \frac{x^3}{3} + 1$. Die Addition einer Zahl (hier die 1) bewirkt eine Verschiebung der Kurve auf der y-Achse nach oben. Im Wendepunkt (hier (0; 1)) ändert sich die Krümmungsrichtung der Kurve.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-8	-5/3	2/3	1	4/3	11/3	10



5.5 Die Funktion $y = a^x$

Bei dieser Funktionsgleichung steht die unabhängige Variable im Exponenten, es ist eine *Exponentialfunktion*. Die allgemeine Form der Gleichung lautet $y = a^x$. Die Abbildung zeigt als Beispiel den Graphen von $y = 2^x$. (Als *die* Exponentialfunktion im engeren Sinne wird die Funktion $y = e^x$ mit der Eulerschen Zahl $e = 2,71828\dots$ als Basis bezeichnet.)

x	-2	-1	0	1/2	1	2	3
y	1/4	1/2	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

