



Rüdiger Kuhnke

Mechanik

Dieses Skriptum deckt im wesentlichen den Inhalt der Lehrpläne für technisch orientierte berufsbildende Schulen ab, dies entspricht etwa dem Stoff der Sekundarstufe I.

Version 0.1 vom 2.4.2012
Noch nicht vollständig korrigiert

Kontakt zum Autor: rkunke@rkunke.eu

1 Kinematik

- 1.1 Bewegung
- 1.2 Gleichförmige Bewegung
- 1.3 Exkurs: Vektoren
- 1.4 Beschleunigte Bewegung
- * Momentangeschwindigkeit

2 Dynamik

- 2.1 Kraft, Masse und Beschleunigung
- 2.2 Gewichtskraft und Gravitation
- 2.3 Die Newtonschen Axiome
- 2.4 Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften
- 2.5 Reibung
- 2.6 Die geneigte Ebene
- 2.7 Federkraft, Hookesches Gesetz
- 2.8 Hebel und Drehmoment

3 Arbeit, Energie, Leistung

- 3.1 Arbeit
- 3.2 Energie
- 3.3 Leistung

4 Hydrostatik

- 4.1 Druck
- 4.2 Der hydrostatische Druck
- 4.3 Auftrieb und Archimedes
- 4.4 Hydraulik

1 Kinematik

- 1.1 Bewegung*
- 1.2 Gleichförmige Bewegung*
- 1.3 Exkurs: Vektoren*
- 1.4 Beschleunigte Bewegung*
- * Momentangeschwindigkeit*

1.1 Bewegung

Die Kinematik beschreibt mit den Begriffen *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* die Bewegung von Körpern. Diese können sich auf gerader oder gekrümmter Bahn bewegen und darüber hinaus ihre Geschwindigkeit ändern oder beibehalten. Beispiele sind

- die Fahrt eines Zuges mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf gerader Strecke,
- der freie Fall, eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, bei der der bewegte Körper immer schneller wird,
- die Kreisbewegung, bei der sich in jedem Moment die Richtung der Bewegung ändert,
- der horizontale Wurf, eine Überlagerung zweier Bewegungen: einer horizontalen und einer vertikalen.

Eine fast jedem bekannte Erscheinung zeigt, daß Bewegung etwas Relatives ist: man sitzt in einem Zug und erwartet dessen baldige Abfahrt. Plötzlich scheint es loszugehen, der auf dem Nachbargleis stehende Zug bleibt zurück. Aber kurz darauf belehrt uns ein Blick auf den Bahnsteig eines Besseren: nicht der eigene Zug bewegt sich, sondern der andere.

Dabei wird der Bahnsteig als ruhend angenommen, obwohl er die Erdrotation mitmacht, sich mit der Erde um die Sonne bewegt usw.

Kurz: zur exakten Beschreibung einer Bewegung muß man angeben, welchen anderen Gegenstand man als ruhend annimmt¹. Dieser andere Gegenstand heißt *Bezugskörper*, ein mit ihm fest verbundenes räumliches Koordinatensystem nennt man *Bezugssystem*. In dem Beispiel mit der Zugabfahrt ist der Bahnsteig das Bezugssystem.

Die Bewegung eines Körpers läßt sich nur relativ zu einem Bezugskörper bzw. einem Bezugssystem angeben.

¹ Im täglichen Leben ist diese Angabe natürlich überflüssig, da allgemein der Erdboden als ruhend angenommen wird.

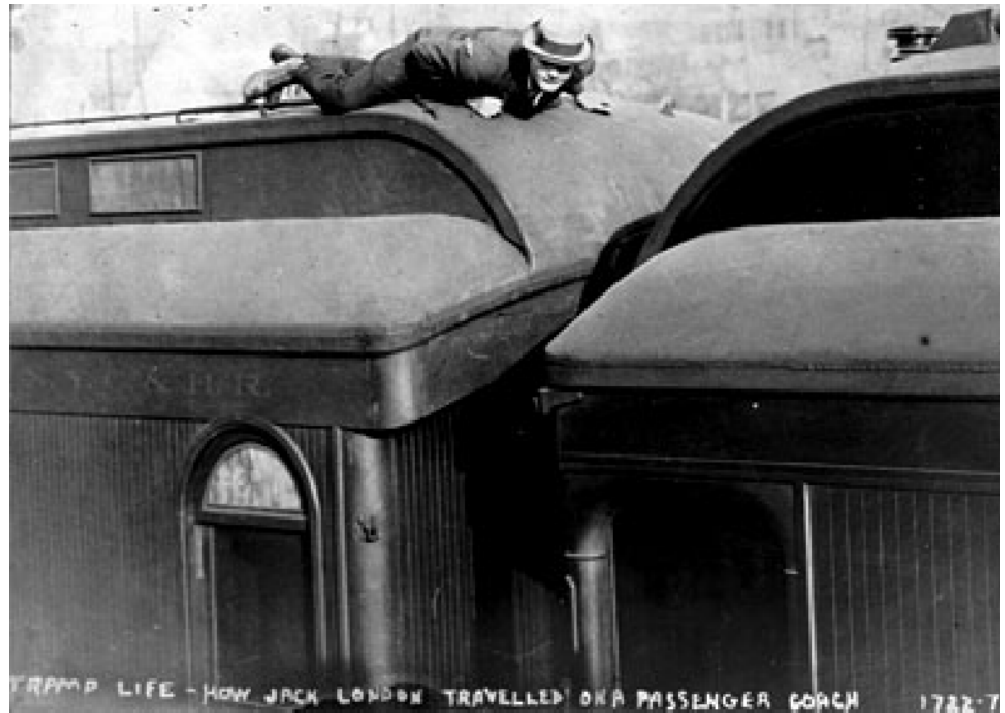


Abbildung 1-1: Das für diesen Reisenden ruhende Bezugssystem ist der fahrende Zug.

1.2 Gleichförmige Bewegung

Die Geschwindigkeit

Ein Körper bewege sich entlang einer geraden Strecke. Zum Zeitpunkt t_1 befinde er sich am Ort s_1 , zum Zeitpunkt t_2 am Ort s_2 .

Die *Geschwindigkeit* v des Körpers ist das Verhältnis des zurückgelegten Weges $\Delta s = s_2 - s_1$ zur dafür benötigten Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$, also der Quotient der Differenzen $s_2 - s_1$ und $t_2 - t_1$:

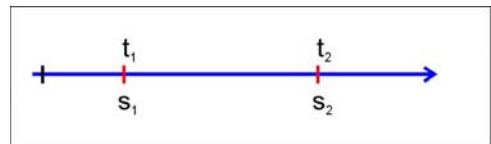


Abbildung 1-2: Geradlinige Bewegung

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1-1)$$

Beispiel: Ein Auto fährt ein gerades Stück Autobahn entlang. Folgende Ort-Zeit-Messungen liegen vor:

t / s	0	20	40	60	80
s / km	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5

1 km wird in 40 s zurückgelegt, damit ergibt sich die Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1000 \text{ m}}{40 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1-2)$$

Die Umrechnung von m/s in km/h und zurück ist einfach:

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{10^{-3} \text{ km}}{\frac{1}{3,6} \cdot 10^{-3} \text{ h}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (1-3)$$

Beispiel: Ein Sprinter, der die 100 m - Strecke in 10 Sekunden läuft, hat eine Geschwindigkeit mit 36 km/h.

$$v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \frac{10^{-3} \text{ km}}{\frac{1}{3,6} \cdot 10^{-3} \text{ h}} = 10 \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Was ist wie schnell? Fußgänger: 5 km/h = 1,4 m/s, Auto: 180 km/h = 50 m/s, Passagierflugzeug: 900 km/h = 250 m/s, Schall: 1200 km/h = 340 m/s, Rakete: 1200 m/s, interplanetare Sonde: 20 km/s, Erde auf ihrer Bahn um die Sonne: 30 km/s, Licht: fast 300000 km/s.

Gleichförmige Bewegung

Werden in gleichen Zeitintervallen Δt gleiche Wegstrecken Δs zurückgelegt und ist darüber hinaus die Bewegung geradlinig, so spricht man von *gleichförmiger Bewegung*:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{const} \quad (1-4)$$

Daraus läßt sich ein Weg-Zeit-Gesetz ableiten, das den Ort des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt angibt. Für diese Berechnung kommt es nur auf die Zeitdifferenz Δt an, so daß man $t_1 = 0$ setzen kann. Man hat dann

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2} \quad (1-5)$$

s_1 , den Startpunkt der Bewegung, benennt man praktischerweise in s_0 um:

$$v = \frac{s_2 - s_0}{t_2} \quad (1-6)$$

Umstellung der Gleichung liefert

$$vt_2 = s_2 - s_0 \Leftrightarrow vt_2 + s_0 = s_2 \quad (1-7)$$

Der Index 2 kann wegfallen, damit erhält man das

$$\text{Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung:} \\ s = vt + s_0 \quad (1-8)$$

Für das vorletzte Beispiel mit $s_0 = 17,5 \text{ km}$ und konstanter Geschwindigkeit ($v = 25 \text{ m/s}$) berechnet man den Ort des Wagens zur Zeit t nach der Formel:

$$s = v \cdot t + s_0 = 25 \text{ m/s} \cdot t + 17500 \text{ m.}$$

Nach 40 Sekunden ist der Wagen also bei

$$s = 25 \text{ m/s} \cdot 40 \text{ s} + 17500 \text{ m} = 1000 \text{ m} + 17500 \text{ m} = 18,5 \text{ km}$$

angekommen, nach 80 Sekunden bei

$$s = 25 \text{ m/s} \cdot 80 \text{ s} + 17500 \text{ m} = 2000 \text{ m} + 17500 \text{ m} = 19,5 \text{ km.}$$

Das Weg-Zeit-Diagramm

Die graphische Darstellung einer gleichförmigen Bewegung ist das *Weg-Zeit-Diagramm*. Es zeigt den Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t und dem Startpunkt s_0 . Die Geschwindigkeit v ist die Steigung der Geraden.

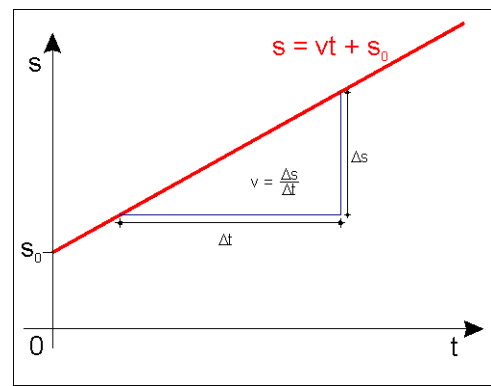


Abbildung 1-3: Das Weg-Zeit-Diagramm. (Die Gleichung $s = vt + s_0$ hat die Form der Geradengleichung $y = mx + b$.)

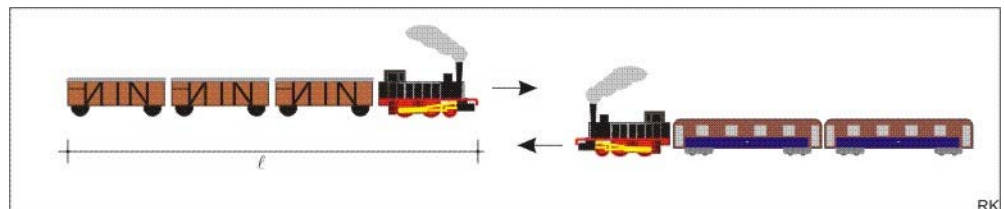
Beispiel 1: Ein Frachtschiff legt in 1 Stunde 15 Seemeilen zurück (der Seeman würde hier sagen, die *Fahrt* beträgt 15 *Knoten*; 1 *Knoten* ist 1 Seemeile pro Stunde; 1 Seemeile sind 1,85 km).

- Man berechne die Geschwindigkeit v in km/h.
- Wie weit kommt es in $6\frac{1}{2}$ Tagen? (Angabe in km)

$$\text{a) } t_1 = 1 \text{ h, } s_1 = 15 \text{ sm} = 15 \cdot 1,85 \text{ km, } v = \Delta s / \Delta t = 27,75 \text{ km/h}$$

$$\text{b) } s_2 = v \cdot t_2 = 27,75 \text{ km/h} \cdot 146 \text{ h} = 4329 \text{ km}$$

Beispiel 2: Ein Fahrgast sitzt im Zug und sieht einen entgegenkommenden Güterzug von 160 m Länge vorbeifahren. Der eigene Zug hat eine Geschwindigkeit von 104 km/h, während der Güterzug mit 40 km/h fährt. Wie lange ist dem Fahrgast die Aussicht versperrt?



$$l = 160 \text{ m, } v_1 = 104 \text{ km/h, } v_2 = 40 \text{ km/h, } t = ?$$

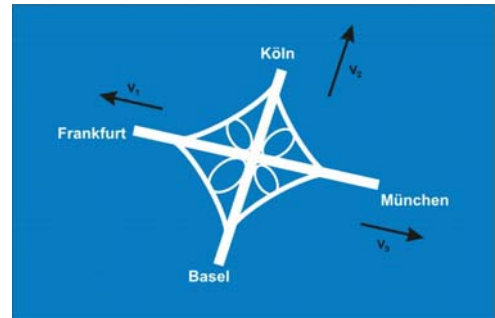
Die Züge bewegen sich mit einer relativen Geschwindigkeit v_{rel} aneinander vorbei:

$$v_{rel} = v_1 + v_2 = 144 \text{ km/h} = 144 \cdot (10^3 \text{ m}) / (3,6 \cdot 10^3 \text{ s}) = 144/3,6 \text{ m/s} = 40 \text{ m/s}$$

$$v = s/t \rightarrow t = s/v; t = l / v_{rel} = 160 \text{ m} / 40 \text{ m/s} = 4 \text{ s}$$

1.3 Exkurs: Vektoren

Die übliche Angabe einer Geschwindigkeit, z. B. 180 km/h, reicht alleine noch nicht zur Beschreibung einer Bewegung aus. In der Skizze fahren drei Autos von einem gemeinsamen Startpunkt aus jeweils mit 180 km/h in drei verschiedene Richtungen. Die Angabe $v_1 = v_2 = v_3 = 180 \text{ km/h}$ ist unvollständig, denn die Bewegungen der drei Autos sind zweifellos verschieden voneinander, und zwar bezüglich der Fahrtrichtung.



Physikalische Größen, die neben einer Betragsangabe noch eine Richtungsangabe besitzen, heißen *Vektoren* oder *vektorielle Größen*². Beispiele dafür sind die Geschwindigkeit, der Ort, die Beschleunigung oder die Kraft.

Man schreibt üblicherweise das Zeichen für die vektorielle Größe mit einem Pfeil darüber oder im Fettdruck: $\vec{v}, \vec{s}, \vec{a}, \vec{F}$ bzw. $\mathbf{v}, \mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{F}$. Den Betrag eines Vektors schreibt man dann einfach als v, s, a, F (oder mit Betragsstrichen: $|\vec{v}|, |\vec{s}|, |\vec{a}|, |\vec{F}|$ bzw. $|\mathbf{v}|, |\mathbf{s}|, |\mathbf{a}|, |\mathbf{F}|$).

Für die drei gleichschnellen Autos gilt also $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_3$, wohl aber $v_1 = v_2 = v_3$.

Viele Formulierungen vereinfachen sich in vektorieller Schreibweise. So lässt sich z. B. die Definition der gleichförmigen Bewegung kürzer fassen: eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn $\mathbf{v} = \text{const.}$

Die zeichnerische Darstellung von Vektoren erfolgt durch Pfeile:

- die Richtung des Pfeils gibt die Richtung der vektoriellen Größe an
- die Länge des Pfeils gibt den Betrag der vektoriellen Größe an.

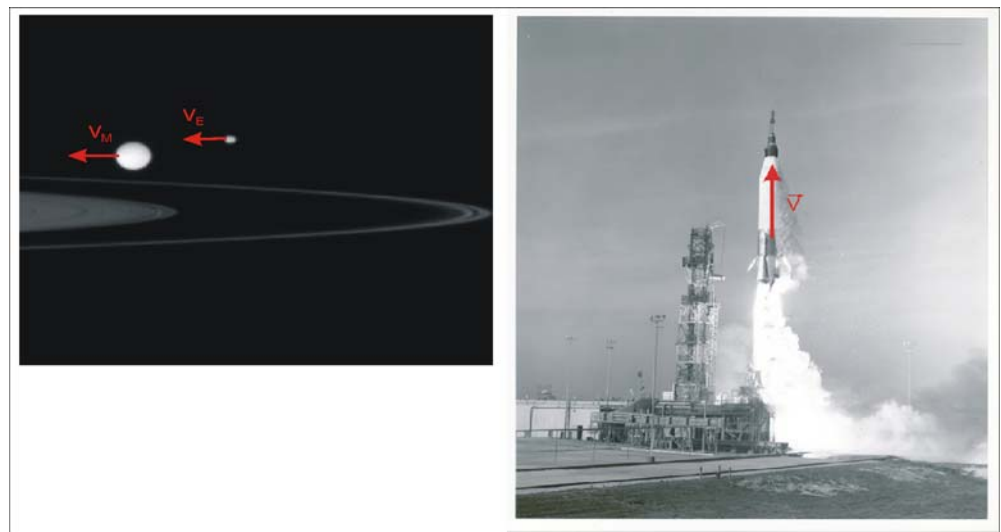


Abbildung 1-4: Rechts: Die beiden Saturnmonde Mimas und Epimetheus bewegen sich mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_M, \mathbf{v}_E$ knapp oberhalb der Ringebene. Links: Die Rakete bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht nach oben.

² Größen ohne Richtung (z. B. Zeit t , Masse m) heißen Skalare (oder skalare Größen).

Außer der Geschwindigkeit und der Beschleunigung (s. u.) sind auch der Ort und die Ortsveränderung als Vektoren darstellbar. In Abb. 1- links wird ein Punkt als *Ortsvektor* in einem Koordinatensystem dargestellt, die x- und y-Werte sind die beiden *Komponenten* des Vektors \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = (x, y). \quad (1-9)$$

Im Beispiel dieser Abbildung würde man $\mathbf{r} = (5, 6)$ schreiben. Rechts ist die Bewegung \mathbf{s} eines Körpers vom Ort P_1 zum Ort P_2 dargestellt.

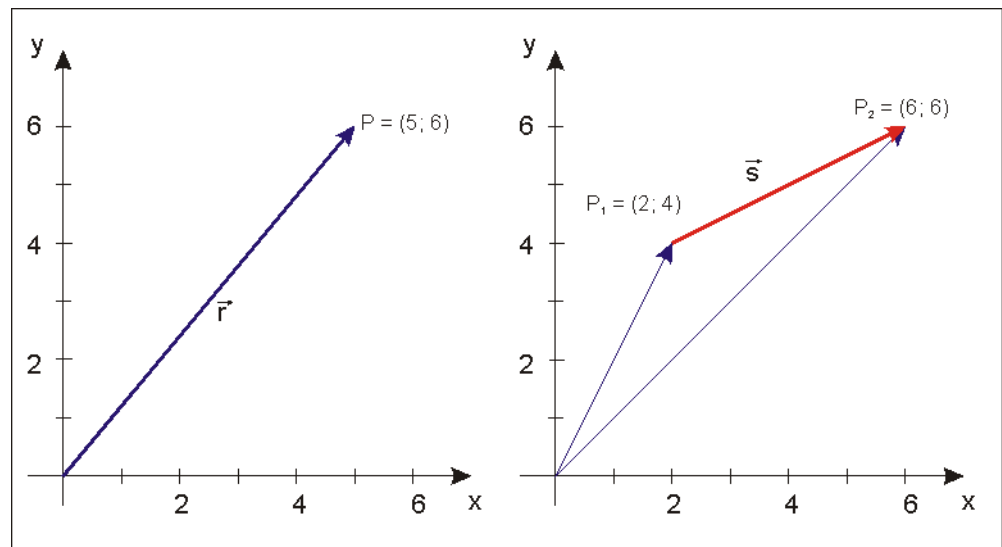


Abbildung 1-5: Ortsvektoren

Wie ist die Ortsveränderung \mathbf{s} in der Komponentenschreibweise darstellbar? Man verschiebt den Vektor parallel so, daß sein Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt. Man verändert ihn dadurch nicht: sowohl sein Betrag als auch seine Richtung bleiben erhalten.

In der Abbildung sieht man den parallelverschobenen Vektor $\mathbf{s} = (4, 2)$. Die Ortsveränderung \mathbf{s} ist die Subtraktion des ersten Ortes vom zweiten:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (6, 6) - (2, 4) = (6 - 2, 6 - 4) = (4, 2) \quad (1-10)$$

Dies ist ein Beispiel für eine *Vektorsubtraktion*. Analog dazu werden Vektoren addiert, indem ihre Komponenten addiert werden. Dies wird im Kapitel 2 (Dynamik) bei der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften noch besprochen werden.

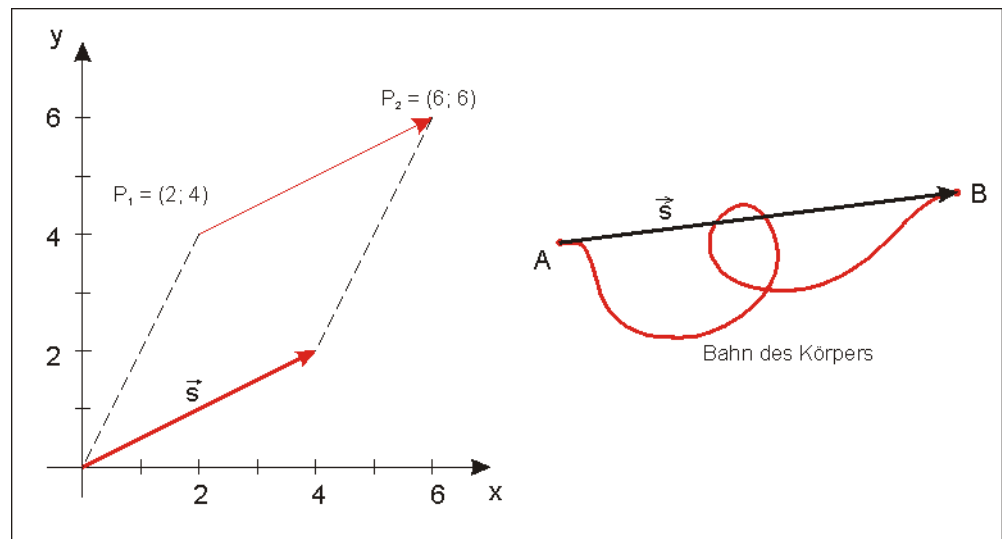


Abbildung 1- 6: Parallelverschiebung und Bahnunabhängigkeit

Aus Abb. 1-6 ist außerdem ersichtlich, daß die Ortsveränderung unabhängig von der tatsächlichen Bahn durch einen Vektor darstellbar ist.

1.4 Beschleunigte Bewegung

Unter Beschleunigung versteht man umgangssprachlich eine Erhöhung der Geschwindigkeit. In der Physik bedeutet dieser Begriff darüber hinaus jegliche Änderung des Bewegungszustands, d. h.

$$\mathbf{v} \neq \text{const.} \quad (1-11)$$

Nicht nur die Erhöhung der Geschwindigkeit ist also eine Beschleunigung, sondern auch eine Änderung der Bewegungsrichtung. Beim freien Fall bleibt die Bewegungsrichtung erhalten, nur der Betrag der Geschwindigkeit erhöht sich: der fallende Körper wird beschleunigt. Die Bewegung eines Fahrzeugs im Kinderkarussell ist trotz konstanter Drehgeschwindigkeit ebenfalls eine Beschleunigung, weil sich Bewegungsrichtung ständig ändert. Ein Beispiel für die gleichzeitige Änderung von Tempo und Richtung ist der horizontale Wurf. Auch das Abbremsen eines bewegten Körpers, die *Verzögerung*, ist eine Beschleunigung, und zwar eine negative.

Gelegentlich findet man, wenn nur der Betrag der Geschwindigkeit von Interesse ist, den Begriff *Schnelligkeit*. Im Angelsächsischen gibt es den entsprechenden Unterschied zwischen *velocity* und *speed*.

Wie die Geschwindigkeit, so ist auch die Beschleunigung \mathbf{a} eine vektorielle Größe; hier wird jedoch nur vom Betrag a die Rede sein.

Gleichmäßige Beschleunigung

Ein Körper bewege sich entlang einer geraden Strecke. Zum Zeitpunkt t_1 bewege er sich an s_1 mit der Geschwindigkeit v_1 vorbei, zum Zeitpunkt t_2 an s_2 mit der Geschwindigkeit v_2 .

Die *Beschleunigung* a als Änderung der Geschwindigkeit ist definiert als der Quotient der Differenzen $v_2 - v_1$ und $t_2 - t_1$:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1-12)$$

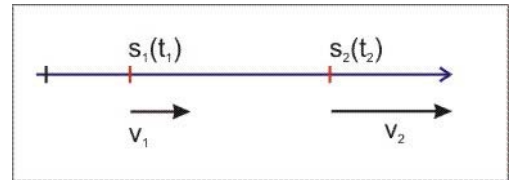


Abbildung 1- 7: Beschleunigung bei geradliniger Bewegung

Die Einheit der Beschleunigung ergibt sich zu

$$[a] = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (1-12)$$

Ist darüber hinaus $a = \text{const}$, so sprechen wir von einer *gleichmäßig beschleunigten Bewegung*.

Beispiel: Ein Körper bewegt sich ungleichförmig, aber geradlinig. Wie groß ist die Beschleunigung, wenn folgende Geschwindigkeits-Zeit-Messungen vorliegen:

t/s	0	1	2	3	4
v/ms^{-1}	10	12	14	16	18

Aus der Tabelle entnimmt man $\Delta v/\Delta t = \text{const.}$, also findet man z. B.

$$a = \Delta v/\Delta t = (12 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}) / 1 \text{ s} = 2 \text{ m/s}^2 \text{ oder } (18 \text{ m/s} - 12 \text{ m/s}) / (4 \text{ s} - 1 \text{ s}) = 2 \text{ m/s}^2$$

Wir betrachten wieder eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \text{const.} \quad (1-13)$$

Um bei dieser Beschleunigung die Geschwindigkeit des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt zu bestimmen, wählen wir $t_1 = 0$. Für die Anfangsgeschwindigkeit v_1 schreiben wir v_0 und erhalten

$$a = \frac{v_2 - v_0}{t_2} \Leftrightarrow a \cdot t_2 = v_2 - v_0. \quad (1-14)$$

Also ist

$$v_2 = a \cdot t_2 + v_0, \quad (1-15)$$

und läßt man den Index 2 weg, erhält man das

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:

$$v = a \cdot t + v_0 \quad (1-16)$$

Beschleunigt der Körper aus dem Ruhezustand, ist $v_0 = 0$ und die Gleichung reduziert sich zu

$$v = a \cdot t. \tag{1-17}$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

Die graphische Darstellung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist das *Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm*. Es zeigt die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Die Beschleunigung a ist die Steigung der Geraden.

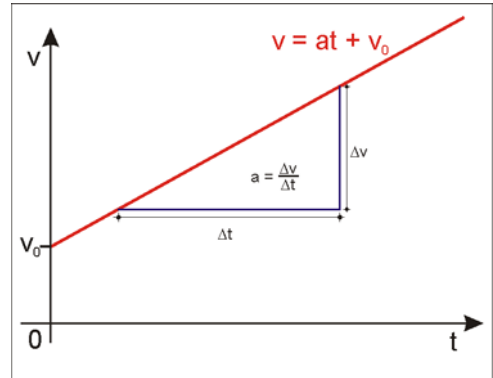


Abbildung 1-8: Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. (Die Gleichung $v = at + v_0$ hat die Form der Geradengleichung $y = mx + b$.)

Beispiel: Eine S-Bahn fährt mit einer konstanten Beschleunigung von $0,8 \text{ m/s}^2$ an. Welche Geschwindigkeit hat sie nach 5 Sekunden erreicht?

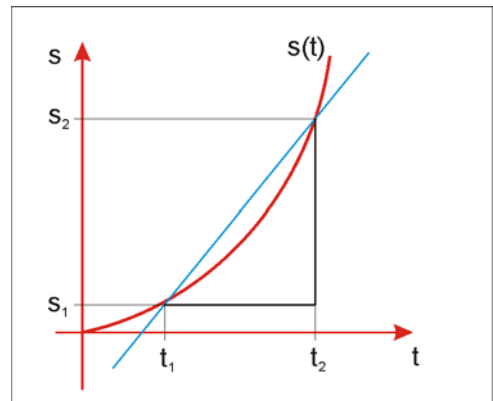
$$a = 0,8 \text{ m/s}^2, t = 5 \text{ s}, v = ?$$

$$v = at \rightarrow v = 0,8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = 4 \text{ m/s}$$

Mittlere Geschwindigkeit

Die *mittlere Geschwindigkeit* einer ungleichförmigen Bewegung im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ ist gleich der Steigung der zugehörigen Sekante durch die entsprechenden Punkte der Weg-Zeit-Kurve.

$$\bar{v}_{t_1 \dots t_2} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \tag{1-18}$$



Bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung gilt

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{1-19}$$

Abbildung 1-9: Mittlere Geschwindigkeit

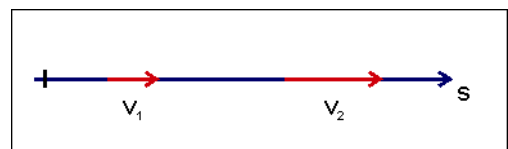


Abbildung 1-10: Bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung wird über v_1 und v_2 gemittelt.

Das Weg-Zeit-Gesetz

Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt für die zurückgelegte

Strecke

$$s = \bar{v} \cdot t + s_0 = \frac{0 + at}{2} \cdot t + s_0, \quad (1-20)$$

dies ist das

Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:

$$s = \frac{a}{2} t^2 + s_0. \quad (1-21)$$

Das Weg-Zeit-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist eine Parabel.

Beispiel 1: Wie groß ist die Geschwindigkeit obiger S-Bahn ($a = 0,8 \text{ m/s}^2$, $s = 50 \text{ m}$) nach 50 m?

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{(2 \cdot 0,8 \text{ m/s}^2 \cdot 50 \text{ m})} = \sqrt{(80 \text{ m}^2/\text{s}^2)} = 8,94 \text{ m/s}$$

Beispiel 2: Ein Zug soll aus der Ruhe in 50 s gleichmäßig beschleunigt auf eine Fahrgeschwindigkeit von 108 km/h gebracht werden.

$$t = 50 \text{ s}, \quad v = 108 \text{ km/h} = \dots 30 \text{ m/s}, \quad a = ?, \quad s = ?$$

$$v = at \rightarrow a = v/t = (30 \text{ m/s}) / (50 \text{ s}) = 3/5 \text{ m/s}^2 = 0,6 \text{ m/s}^2$$

$$s = v^{(m)} \cdot t = (0 + 30 \text{ m/s})/2 \cdot t = 15 \text{ m/s} \cdot 50 \text{ s} = 750 \text{ m}$$

Beispiel 3: Eine U-Bahn hat beim Anfahren eine Beschleunigung von $0,55 \text{ m/s}^2$. Nach welcher Zeit hat sie 100 m zurückgelegt?

$$a = 0,55 \text{ m/s}^2, \quad s = 100 \text{ m}, \quad t = ?$$

$$t = \sqrt{(2s/a)} = \sqrt{[(2 \cdot 100 \text{ m}) / (0,55 \text{ m/s}^2)]} = 19,1 \text{ s}$$

1.4.2 Der freie Fall

Der Legende nach führte Galileo Galilei am schiefen Turm von Pisa ein Experiment durch, bei dem er Körper verschiedenen Gewichts gleichzeitig losließ und deren Fallzeiten notierte³. Es herrschte damals noch die von Aristoteles stammende Auffassung vor, daß schwere Körper schneller fallen als leichte.

Galilei jedoch zeigte, daß schwere und leichte Körper gleich schnell fallen und daß Unterschiede in der Fallgeschwindigkeit nur auf unterschiedliche Luftwiderstände zurückzuführen sind. Bei gleichzeitigem Fall einer Daunenfeder und einer Stahlkugel in einer evakuierten Glasröhre sieht man, daß ohne Luftwiderstand beide gleich schnell fallen.

Der *freie Fall* ist ein Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Am selben Ort fallen alle Körper (abgesehen von der erwähnten Hemmung durch den Luftwiderstand) mit der gleichen Beschleunigung, der *Erd-* oder *Fallbeschleunigung* $a =: g$. Diese ist allerdings ortsabhängig, sie beträgt am Äquator $g_{\text{Äq}} = 9,78 \text{ m/s}^2$ und an den Polen $g_{\text{Pol}} = 9,83 \text{ m/s}^2$. (Hierbei spielen einerseits die Entfernung zum Erdmittelpunkt und andererseits die der Anziehung entgegenwirkende rotationsbedingte Fliehkraft eine Rolle.)

Die in Paris, dem Sitz der internationale Eichbehörde, herrschende

³ Es gibt allerdings keine historischen Quellen, die eine tatsächliche Durchführung dieses Experiments am Schiefen Turm belegen.

Erdbeschleunigung wurde als *Normfallbeschleunigung* festgelegt; sie beträgt $g^0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Üblicherweise rechnet man mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; für Überschlagsrechnungen genügt der Wert $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Da es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt, muß man lediglich in den bekannten Formeln die Beschleunigung a durch g und den Weg s durch die Höhe h ersetzen.

$$v = gt; \quad h = \frac{g}{2} \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad v = \sqrt{2gh} \rightarrow h = \frac{v^2}{2g}. \quad (1-22)$$

Beispiel 1: Welche Geschwindigkeit hat man nach einem Sprung vom 5 m - Sprungbrett beim Auftreffen auf die Wasseroberfläche erreicht?

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m}} = \sqrt{100 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 10 \text{ m/s}.$$

Das sind 36 km/h; man sollte also nur in gefüllte Schwimmbecken springen.

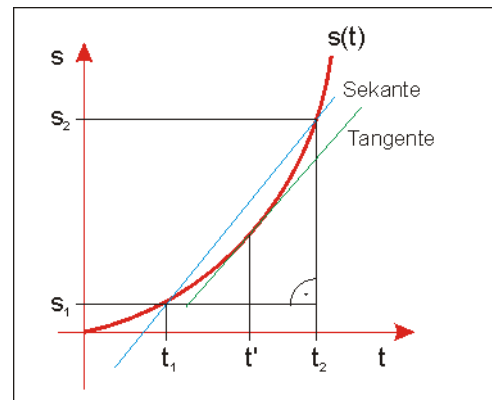
Beispiel 2: Mit einem Fallschirm erreicht man den Boden mit einer Geschwindigkeit von ca. 18 km/h. Aus welcher Höhe muß man springen, um diese Geschwindigkeit im freien Fall zu erreichen?

$$h = v^2 / 2g = 25/20 = 2,5 \text{ m}$$

* Momentangeschwindigkeit

Die *Momentangeschwindigkeit* zu einem beliebigen Zeitpunkt t' ist gleich der Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Kurve zur Zeit t' . Mathematisch ausgedrückt ist die Geschwindigkeit die Ableitung der Beschleunigung:

$$v_{t'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$



Dynamik

- 2.1 Kraft, Masse und Beschleunigung
- 2.2 Gewichtskraft und Gravitation
- 2.3 Die Newtonschen Axiome
- 2.4 Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften
- 2.5 Reibung
- 2.6 Die geneigte Ebene
- 2.7 Federkraft, Hookesches Gesetz
- 2.8 Hebel und Drehmoment

2.1 Kraft, Masse und Beschleunigung

Wird auf einen ruhenden Körper eine (hinreichend große) Kraft ausgeübt, wird er sich bewegen¹. Ein sich bewegender Körper hingegen kann durch eine Kraft abgebremst oder in eine andere Richtung gelenkt werden. Allgemein formuliert: die Einwirkung einer Kraft bewirkt eine Änderung des Bewegungszustands, eine Beschleunigung.

Die Größe der aufzuwendenden Kraft ist sowohl zur Masse des Körpers als auch zur Beschleunigung proportional:

$$F \sim m, F \sim a \quad (2-1)$$

Die physikalische Größe *Kraft* (Formelzeichen F) ist als das Produkt aus Masse und Beschleunigung definiert:

$$F = m \cdot a. \quad (2-2)$$

Die Kraft ist, ebenso wie die Beschleunigung, eine vektorielle Größe².

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}. \quad (2-3)$$

Wird die Masse in kg und die Beschleunigung in m/s^2 angegeben, ergibt sich die Einheit der Kraft, das *Newton*, abgekürzt N.

¹ Die Kraft kann statt dessen aber auch eine Verformung des Körpers bewirken, z. B. bei der Dehnung einer Schraubenfeder. Man spricht dann von der *statischen* Wirkung der Kraft (im Unterschied zur *dynamischen*, bewegendem Wirkung).

² In vielen Fällen genügt aber die Rechnung mit dem Betrag $F = |\mathbf{F}|$.

$$[F] = [m \cdot a] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N} \quad (2-4)$$

Beispiel 1: Welche Beschleunigung erfährt ein Körper der Masse 1 kg, auf den eine konstante Kraft von 1 N einwirkt?

Der Körper beschreibt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}}{1 \text{ kg}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

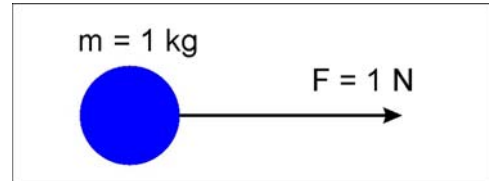


Abb. 2-1: Eine Masse von 1 kg wird mit einer Kraft von 1 N beschleunigt

Beispiel 2: Ein Auto der Masse 1,5 t fährt mit einer Geschwindigkeit von 36 km/h und wird innerhalb von 3 s zum Stillstand gebracht. Welche Bremskraft ist erforderlich?

$m = 1500 \text{ kg}$, $v = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$,

$t = 3 \text{ s}$, $F_{Br} = ?$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{(0 - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{3 \text{ s}} = -\frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

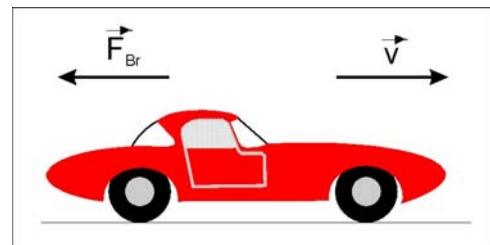


Abb. 2-2: Die Bremskraft wirkt in die der Geschwindigkeit entgegengesetzte Richtung

Die Rechnung ergibt einen negativen Wert: eine Verzögerung ist eine negative Beschleunigung. Die Bremskraft ist der Bewegung entgegengerichtet.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 1500 \text{ kg} \cdot \left(-\frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -5000 \text{ N} = -5 \text{ kN}$$

2.2 Gewichtskraft und Gravitation

Gewichtskraft

In der Kinematik wurde bereits der *freie Fall* behandelt, eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Wie jede Beschleunigung, so kommt auch die Fallbeschleunigung g durch die Wirkung einer Kraft zustande, in diesem Falle der *Erdsziehungskraft* oder *Gewichtskraft* F_G . Sie ist stets zum Erdmittelpunkt gerichtet – was eine andere Formulierung für "nach unten" ist.

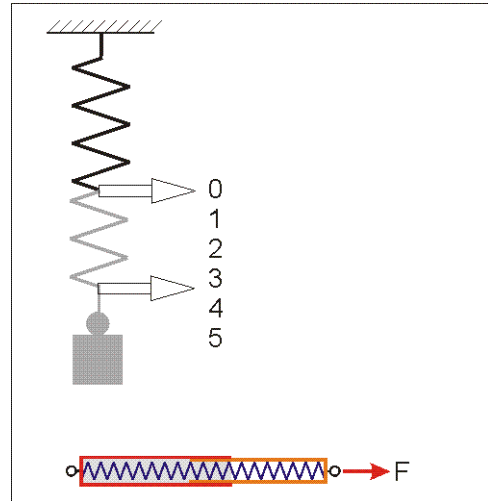
$$F_G = m \cdot g \quad (2-5)$$

Ebenso wie die Fallbeschleunigung g ist auch die Gewichtskraft F_G ortsabhängig. Die Gewichtskraft des Urkilogramms in Paris beträgt

$$F_G = m \cdot g^0 = 1 \text{ kg} \cdot 9,80665 \text{ m} / \text{s}^2 = 9,80665 \text{ N.} \quad (2-6)$$

Praktische Kraftmessung

Die Kraftmessung erfolgt auf Grund der statischen Wirkung der Kraft, z. B. mittels der Dehnung einer Schraubenfeder; eine solche Anordnung heißt *Dynamometer*. Das einfachste Beispiel ist die Gepäckwaage, bei der das Gepäckstück an eine Feder gehängt wird.



Beispiel: Es soll ein Kraftmesser (wie in der Abbildung gezeigt) in Newton geeicht werden. Welche Massen m_1 , m_2 , ... hat man an die Feder zu hängen, um die Kräfte 1 N, 2 N usw. markieren zu können?

Die Massen ergeben sich aus $m = F / g$:
 $m_1 = F_1 / g = 1 \text{ N} / 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,102 \text{ kg}$,
 $m_2 = F_2 / g = 2 \text{ N} / 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,204 \text{ kg}$, usw.

Abb. 2-3: Eine Gepäckwaage ohne und mit Last, ein Labordynamometer

Mit der hier behandelten Federwaage wird nicht die *Masse* des Gepäckstücks gemessen, sondern seine *Gewichtskraft* (oder kurz sein *Gewicht*). Eigentliche Aufgabe einer *Waage* ist aber die Massenbestimmung; im Warenverkehr sind Federwaagen unzulässig.

Gravitation

Die Ursache der Gewichtskraft, die Erdanziehung, ist ein Spezialfall der *Gravitation*, der *allgemeinen Massenanziehung*.

Zwei Körper der Massen m_1 und m_2 , die sich im Abstand r voneinander befinden, ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft F_{Grav} an, die proportional dem Produkt der Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstands ist.

$$F_{Grav} \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (2-7)$$

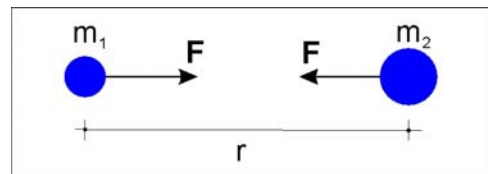


Abb. 2- 4: Massenanziehung

Mit einer Proportionalitätskonstanten, der *Gravitationskonstanten* γ , erhält man das *Newtonsche Gravitationsgesetz*:

$$F_{Grav} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \quad (2-8)$$

Mit

$$\gamma = \frac{F \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2} \quad (2-9)$$

ergibt sich die Einheit der Gravitationskonstanten zu

$$[\gamma] = \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad (2-10)$$

Die Gravitationskonstante ist eine universell gültige Fundamentalkonstante und hat den Wert

$$\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad (2-11)$$

Beispiel 1: Wie groß ist die Anziehungskraft zwischen der Sonne und der Erde?

$m_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $m_E = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $r = 150 \text{ Millionen km}$

$$\begin{aligned} F_{\text{Grav}} &= \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} \\ &= \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 12,0 \cdot 10^{54} \text{ m}^3 \text{ kg}^2}{2,25 \cdot 10^{22} \text{ kg s}^2 \text{ m}^2} = 3,6 \cdot 10^{22} \text{ N} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Welche Kraft übt der Mond ($m = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, Entfernung 384000 km) auf einen 75 kg schweren Menschen aus?

$$F_{\text{Grav}} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 75 \text{ kg}}{(3,84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Bei zwei Körpern der Massen m_1 und m_2 wächst die auf m_1 ausgeübte Anziehungskraft linear mit der Masse des anderen Körpers und fällt sehr schnell mit dem Quadrat des Abstands:

$$F_{\text{Grav}} \sim m_2, \quad F_{\text{Grav}} \sim r^{-2} \quad (2-12)$$

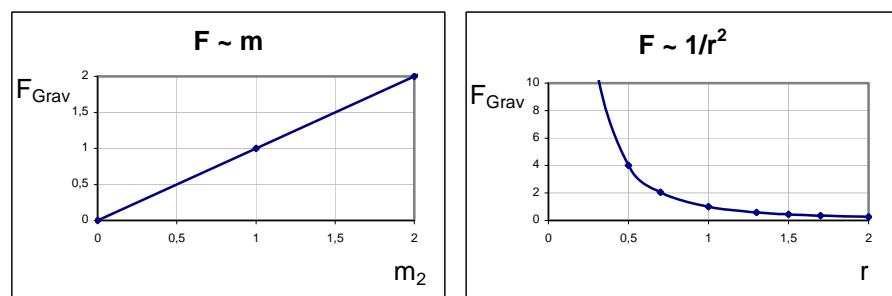


Abb. 2-5: Abhängigkeit der Gravitationskraft auf einen Körper von der Masse des anderen Körpers und dem Abstand voneinander

Wie groß ist eigentlich die Krafteinheit *Newton*? Newton soll die "zün-

dende Idee" zum Gravitationsgesetz gehabt haben, als er einen Apfel vom Baum fallen sah. Ein Apfel wiegt ca. 100 g. Das bedeutet, daß er mit der Kraft $0,1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ N}$ von der Erde angezogen wird: Wenn Sie einen Apfel in der Hand halten, spüren Sie eine Kraft von 1 Newton.

1 Newton = 1 Apfel.

2.3 Die drei Newtonschen Axiome

1. Newtonsches Axiom (Trägheitsgesetz)

Ein Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte Null ist:

$$\mathbf{a} = 0, \text{ wenn } \mathbf{F} = 0. \quad (2-13)$$

Mit anderen Worten: Ein ruhender Körper bleibt in Ruhe, solange keine Kraft auf ihn einwirkt. Wird er dann aber durch eine Kraft beschleunigt, bewegt er sich (Reibungsfreiheit vorausgesetzt) auch ohne weiteres Wirken der Kraft geradlinig und gleichförmig weiter.

Er scheint zwar der Alltagserfahrung nach "von selbst" zur Ruhe zu kommen, dieser Eindruck entsteht jedoch nur dadurch, daß Reibungskräfte auf ihn wirken.

Das 2. Newtonsche Axiom ist uns bekannt:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}. \quad (2-3)$$

Die Beschleunigung einer Masse ist der bewegendenden Kraft proportional (vgl. Abschnitt 2.1).

3. Newtonsches Axiom (Kraft und Gegenkraft, "actio = reactio"):

Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn ein Körper m_1 auf einen Körper m_2 mit der Kraft $\mathbf{F}_{1,2}$ einwirkt (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft $-\mathbf{F}_{2,1}$ von Körper m_2 auf den Körper m_1 (reactio):

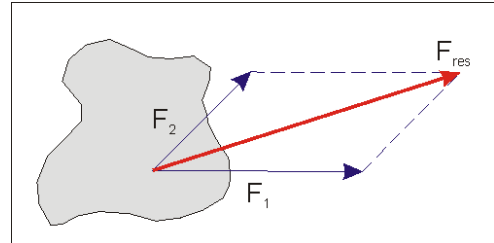
$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} \quad (2-14)$$

Mit anderen Worten: wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, so besitzen die zwischen ihnen auftretenden Kräfte denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen.

2.4 Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften

Zusammensetzung zweier Kräfte

Wenn in einem Punkt des Körpers gleichzeitig zwei Kräfte \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 angreifen, so lassen sich diese durch eine *resultierende Kraft* \mathbf{F}_{res} ersetzen. \mathbf{F}_{res} läßt sich als Diagonale im Parallelogramm aus den Einzelkräften und ihren Parallelen darstellen ("Satz vom Parallelogramm der Kräfte").



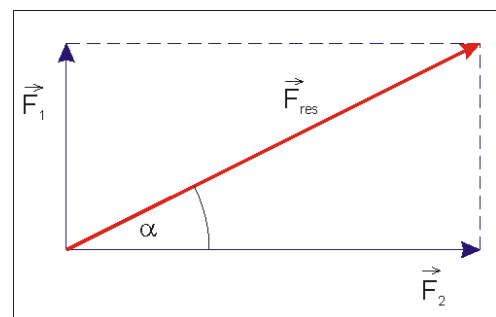
Es handelt sich hier um eine Bildung der *Vektorsumme*, um eine *Vektoraddition*: $\mathbf{F}_{\text{res}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Wählt man den Angriffspunkt der Kraft als Ursprung eines Koordinatensystems und drückt die Vektoren \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 in Komponentenschreibweise aus, so kann man schreiben

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2). \quad (2-15)$$

(Zur Erinnerung: in der Kinematik wurde die Vektorsubtraktion besprochen, in analoger Weise als Subtraktion der Vektorkomponenten voneinander.)

In dem speziellen Fall, daß beide Kräfte senkrecht aufeinander stehen, läßt sich der Satz des Pythagoras anwenden. Der Vektor \mathbf{F}_{res} bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, daher gilt

$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}. \quad (2-16)$$



Beispiel: $F_1 = 20 \text{ N}$ und $F_2 = 40 \text{ N}$ stehen senkrecht aufeinander. Wie groß ist die resultierende Kraft?

$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{20^2 \text{ N}^2 + 40^2 \text{ N}^2} = \sqrt{(400 + 1600) \text{ N}^2} = \sqrt{2000} \text{ N} \approx 44,7 \text{ N}$$

Auch die Richtung des Vektors \mathbf{F}_{res} läßt sich bestimmen. Sie ergibt sich aus dem Winkel α , der zwischen der Ankathete \mathbf{F}_2 und der Gegenkathete, der Parallele zu \mathbf{F}_1 gebildet wird. Nach den Regeln der Trigonometrie gilt

$$\tan \alpha = \frac{F_1}{F_2}, \quad (2-17)$$

In diesem Beispiel gilt

$$\tan \alpha = 20 \text{ N} / 40 \text{ N} = 0,5.$$

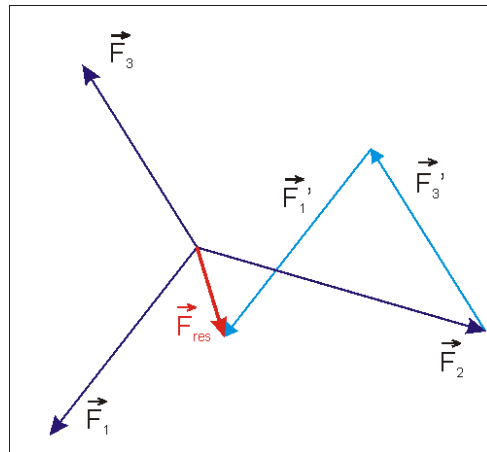
Man erhält den Winkel α zu

$$\arctan 0,5 = \alpha = 26,6^\circ,$$

d. h. die Resultierende bildet mit F_2 einen Winkel von $26,6^\circ$.

Zusammensetzung von mehr als zwei Kräften

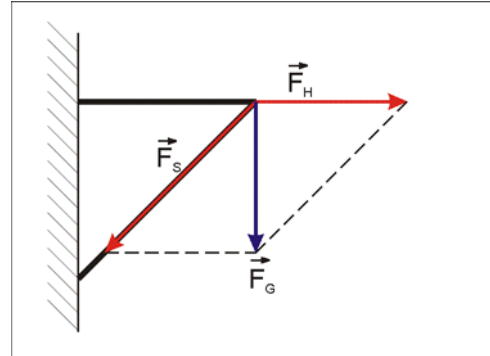
Vektoren lassen sich auch zeichnerisch addieren, indem man sie in geeigneter Weise parallel verschiebt und dann "aneinanderhängt". Folgende Addition dreier, in einem Punkt angreifender Kräfte illustriert das Verfahren.



In einem Punkt greifen F_1 , F_2 und F_3 an. Zunächst wird der Pfeil für F_3 parallel so verschoben, daß er seinen Anfang an der Spitze von F_2 hat, er heißt dann F_3' . Dann wird der Pfeil für F_1 parallel verschoben, so daß er an der Spitze von F_3' beginnt, er heißt dann F_1' . Mit F_2 , F_3' und F_1' hängen alle drei Vektoren zusammen und am Ende von F_1' liegt die Spitze des Pfeils für F_{res} , der am Angriffspunkt der drei Kräfte beginnt.

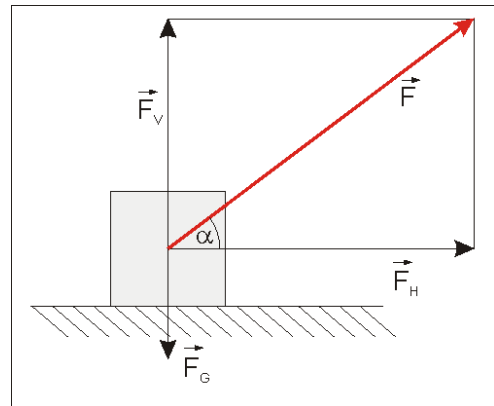
Die Zerlegung von Kräften

Eine Kraft läßt sich in zwei oder mehr Komponenten zerlegen. Zum Beispiel wird in Abb. 2- die Gewichtskraft \vec{F}_G in eine horizontale Komponente \vec{F}_H und eine schräge Komponente \vec{F}_S zerlegt, so daß \vec{F}_G die auf die beiden Teile der Balkenkonstruktion verteilt wird. Dabei wird der horizontale Balken auf Zug und der schräge Balken auf Druck beansprucht.



Die ursprüngliche Kraft \vec{F}_G stellt die Diagonale im durch die Komponenten \vec{F}_H und \vec{F}_S bestimmten Kräfteparallelogramm dar.

Beispiel: Auf einen reibungsfrei horizontal gleitenden Würfel der Masse 100 kg wird eine Kraft derart ausgeübt, daß ihre Horizontalkomponente 40 N und ihre nach oben gerichtete Vertikalkomponente 30 N betragen.



- Wie groß ist die gegebene Kraft \vec{F} ?
- Welchen Winkel bildet sie mit der Horizontalen?
- Was bewirkt die Horizontalkomponente \vec{F}_H ?
- Was bewirkt die Vertikalkomponente \vec{F}_V ?

$$a) F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{(40\text{N})^2 + (30\text{N})^2} = \sqrt{1600 + 900}\text{N} = \sqrt{2500}\text{N} = 50\text{N}$$

$$b) \tan \alpha = \frac{F_V}{F_H} = \frac{30\text{N}}{40\text{N}} = 0,75, \quad \alpha = \arctan 0,75 = 36,9^\circ$$

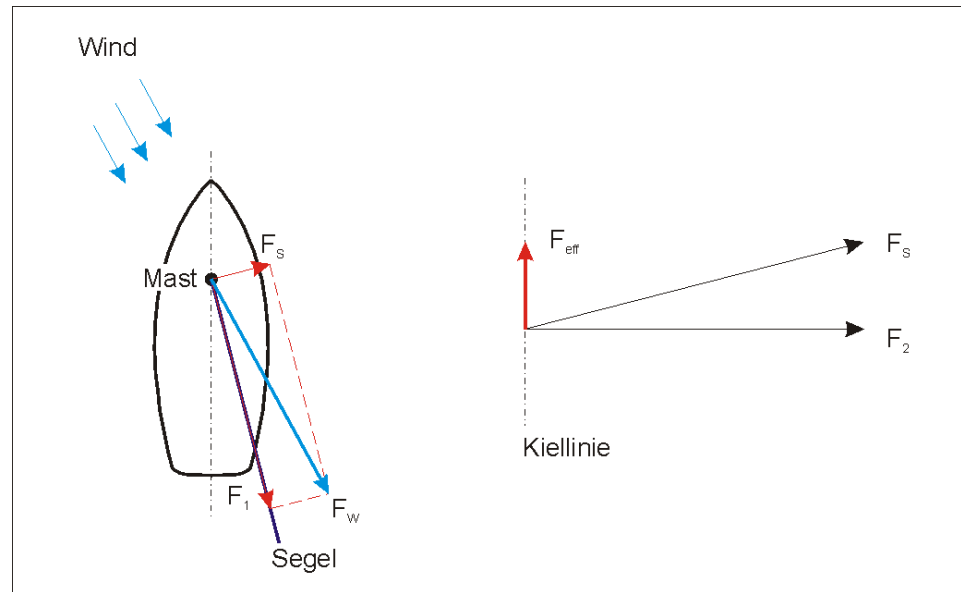
- c) Der Körper bewegt sich horizontal gleichmäßig beschleunigt:

$$a = \frac{F_H}{m} = \frac{40\text{kgm}}{100\text{kg}} = 0,4\text{m/s}^2$$

- d) F_V bewirkt eine Verminderung der Gewichtskraft:

$$F_G - F_H = 1000\text{N} - 30\text{N} = 970\text{N}$$

Beispiel: Fahrt eines Segelschiffes gegen den Wind



Die Windkraft F_W lässt sich in einen Anteil F_1 längs des Segels und einen Anteil F_S rechtwinklig dazu zerlegen. F_1 streicht praktisch wirkungslos am Segel entlang, F_S wirkt auf den Mast des Bootes.

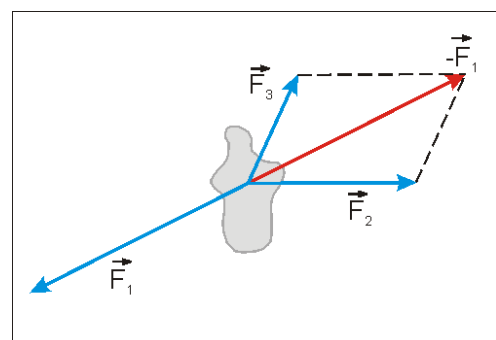
F_S lässt sich nun zerlegen in eine Kraft F_2 quer zum Boot und die Kraft F_{eff} parallel zur Fahrtrichtung. F_2 bewirkt kaum etwas, da der Bootskiel die Querbewegung hemmt, F_{eff} bewirkt die Vorwärtsbewegung des Bootes.

Allgemein formuliert kann man sagen: eine gegebene Kraft \mathbf{F} kann auf beliebige Weise in Teilkräfte (Kraftkomponenten) $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ zerlegt werden. Die Summe der Teilkräfte muß wieder die ursprüngliche Kraft ergeben: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \mathbf{F}$.

Das Gleichgewicht von Kräften

Ist die Vektorsumme aller in einem Punkt eines Körpers angreifender Kräfte Null, so befinden sich diese Kräfte im Gleichgewicht. Im Zustand des Kräftegleichgewichts ändert der Körper seinen Bewegungszustand nicht (1. Newtonsches Axiom).

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = 0 \quad (2-18)$$



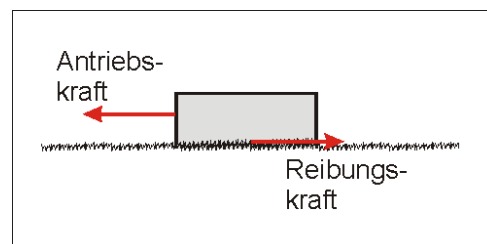
Die Summe von \mathbf{F}_2 und \mathbf{F}_3 ist genau $-\mathbf{F}_1$. Diese Kraft und \mathbf{F}_1 ergeben zusammen die Resultierende $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 = 0$.

2.5 Die Reibung

Reibung und Reibungskoeffizient

An den Kontaktflächen sich relativ zueinander bewegnender Körper wirkt *Reibung*, sie verursacht eine der Bewegung entgegengesetzte *Reibungskraft*.

Bewegt sich ein Körper auf einer ebenen Fläche, ohne daß eine Antriebskraft auf ihn wirkt, kommt er durch die Reibungskraft nach einiger Zeit zum Stillstand. Beim ständigen Wirken einer Antriebskraft, z. B. durch einen Motor, wirkt diese der Reibungskraft entgegen und hält den Körper in Bewegung: $\mathbf{F}_{\text{Antrieb}} = -\mathbf{F}_{\text{Reibung}}$.



Vereinfacht kann man sich das Zustandekommen der Reibungskraft durch die Unebenheiten der Kontaktflächen vorstellen.

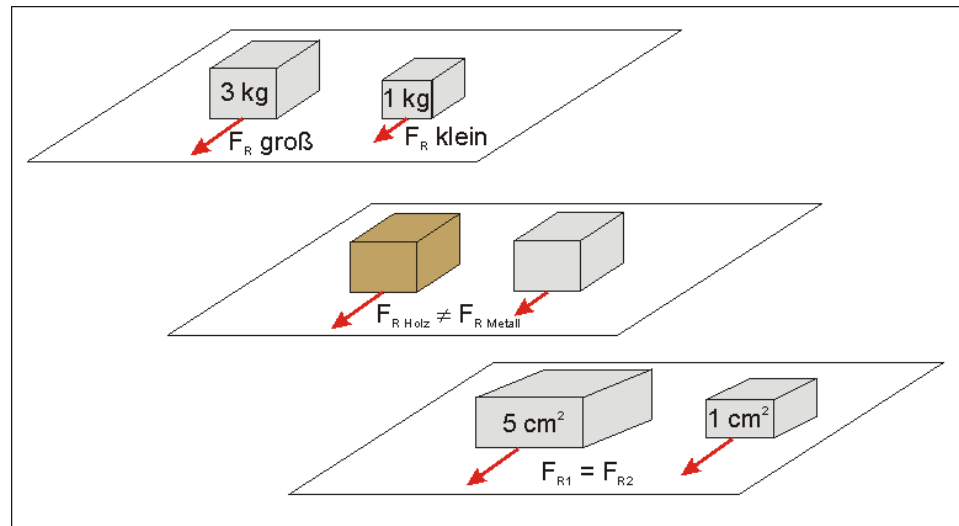
Bewegt man auf einer Ebene Körper verschiedenen Gewichts (aber aus dem gleichen Material) und mißt dabei die zu überwindende Reibungskraft F_R , so stellt man fest, daß diese der Gewichtskraft F_G proportional ist:

$$F_R \sim F_G \quad (2-19)$$

Ersetzt man die Körper durch gleich schwere, aber aus verschiedenem Material bestehende Körper und mißt wieder die Reibungskräfte, sieht man, daß diese je nach Material ebenfalls unterschiedlich sind. Diese Materialabhängigkeit wird durch eine dimensionslose Zahl, den *Reibungskoeffizienten* (oder *Reibungszahl*) μ angegeben. Mit $F_R \sim \mu$ erhält man aus Gl. (2-19) die Beziehung

$$F_R = \mu \cdot F_G. \quad (2-20)$$

Ein weiteres Experiment mit Körpern verschieden großer, auf der Ebene reibender Grundfläche zeigt, daß die Reibungskraft unabhängig von der Größe der aneinander reibenden Kontaktfläche ist.



Abhängigkeit der Reibungskraft von der Auflagekraft und dem Material, Unabhängigkeit von der Größe der Kontaktfläche

Bei Reibung auf einer schiefen Ebene (s. u.) ist nicht, wie in Abb. die Gewichtskraft maßgebend, sondern ihr senkrecht zur Kontaktfläche stehender Anteil, die *Normalkraft* F_N . Allgemein gilt statt $F_R = \mu \cdot F_G$ also

$$F_R = \mu \cdot F_N. \quad (2-21)$$

Haft-, Gleit- und Rollreibung

Stehen zwei ruhende Körper in Kontakt miteinander und soll einer von ihnen bewegt werden, so wächst die dafür aufzuwendende Kraft zunächst bis auf einen bestimmten Wert an, um dann die *Haftreibung* zu überwinden und den Körper in Bewegung zu setzen. Dieser Schwellwert ist die Haftreibungskraft; neben der Normalkraft ist sie vom Haftreibungskoeffizienten μ_{HR} abhängig.

$$F_{HR} = \mu_{HR} \cdot F_N \quad (2-22)$$

Ist der Körper dann erst in Bewegung, ist nur noch die *Gleitreibung* wirksam. Sie ist geringer als die Haftreibung, folglich ist auch die Gleitreibungskraft kleiner als die Haftreibungskraft.

$$F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N, \quad F_{HR} > F_{GR}. \quad (2-23)$$

Schließlich wirkt bei Rädern während des Rollens stets eine Reibungskraft, die ihre Ursache in den normalen Unebenheiten der Unterlage und des Rades, aber auch in der Verformung des Rades während der Fahrt hat. Anders als bei der Gleitreibung ist eine Minimierung dieser *Rollreibung* nicht immer erwünscht, damit ein Kraftschluß zwischen Rad und Unterlage besteht. Ein Beispiel ist der nach wetterbedingten Fahrbahneigenschaften während eines Rennens manchmal mehrfach erforderliche Reifenwechsel bei Rennwagen, was eine Veränderung der Rollreibungskoeffizienten bedeutet.

$$F_{RR} = \mu_{RR} \cdot F_N. \quad (2-24)$$

Auch die Bezeichnung *Rollwiderstand* ist üblich. Sowohl Gleit- als auch Rollreibung sind unabhängig von der Geschwindigkeit.

Beispiel: Ein Auto der Masse $m = 1000$ kg soll angeschoben werden, dabei ist versehentlich die Feststellbremse angezogen. Welche Kraft wäre in diesem Fall aufzuwenden, um das Auto zu bewegen? (Vernachlässigung der Haftreibung, $\mu_{GR} = 0,9$) Welche Kraft ist beim Rollen mit gelöster Bremse aufzubringen? ($\mu_{RR} = 0,025$)

$$F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_G = 0,9 \cdot 10000 \text{ N} = 9000 \text{ N}$$

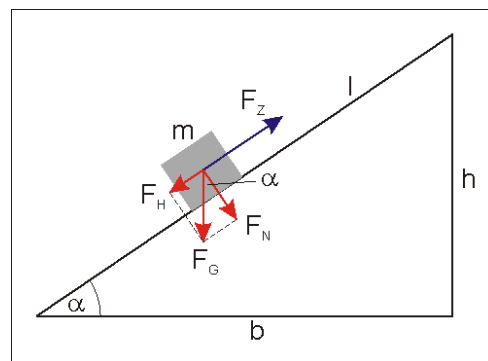
$$F_{RR} = \mu_{RR} \cdot F_G = 0,025 \cdot 10000 \text{ N} = 250 \text{ N}$$

Wie beim Kraftschluß zwischen Rad und Fahrbahn ist die Reibung auch in vielen anderen Fällen erwünscht, z. B. wird bei Bremsen die Reibung zwischen Bremsbelägen und Bremsscheiben zur Umwandlung von Bewegungs- in Wärmeenergie genutzt. Auch Nägel und Schrauben erfüllen ihre Aufgabe aufgrund der großen Haftreibung.

Unerwünscht ist die Reibung bei bewegten Teilen innerhalb von Maschinen, weshalb man Kugel- oder Wälzlager und auch Schmierstoffe einführte. Kugellager ersetzen die Gleitreibung durch die geringere Rollreibung, gleichwohl gibt es auch Gleitlager, die durch Hochleistungsschmierstoffe optimiert werden.

2.6 Die geneigte Ebene

Oft ist es zweckmäßig, das Anheben eines Körper dadurch zu erleichtern, daß man ihn eine Rampe, eine geneigte Ebene, hinaufrollt oder -schiebt.



Die schiefe Ebene: F_H ist die Hangabtriebskraft, F_G die Gewichtskraft, F_N die Normalkraft und F_Z die Zugkraft, mit der die Masse m hinaufgezogen wird. Die geometrischen Verhältnisse lassen sich mit h (Höhe), l (Länge), b (Basis) und α (Neigungswinkel) beschreiben.

Vernachlässigt man die Reibung, bewegt sich der Körper die geneigte

Ebene gleichmäßig beschleunigt herab. Die Gewichtskraft teilt sich in die Normalkraft F_N und die Hangabtriebskraft F_H auf. Beide lassen sich nach den Regeln der Trigonometrie berechnen (der Neigungswinkel der Ebene tritt auch im Kräfteparallelogramm auf):

$$F_N = F_G \cdot \cos \alpha = F_G \cdot \frac{b}{l} \quad (2-25)$$

$$F_H = F_G \cdot \sin \alpha = F_G \cdot \frac{h}{l} \quad (2-26)$$

Die Hangabtriebsbeschleunigung ist

$$a_H = \frac{F_H}{m} = \frac{F_G \cdot \sin \alpha}{m} = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{m} = g \cdot \sin \alpha. \quad (2-27)$$

Ist die Haftreibung groß genug, bleibt der Körper in Ruhe. Vergrößert man aber die Neigung, so vergrößert sich auch die Hangabtriebskraft und der Körper beginnt zu rutschen.

Beispiel: Ein Körper gleitet unter dem Einfluß der Hangabtriebskraft mit der Beschleunigung $a_H = 1 \text{ m/s}^2$ eine geneigte Ebene hinab. Welchen Winkel α bildet die Ebene mit der Horizontalen?

$$a_H = \sin \alpha \cdot g \Rightarrow \sin \alpha = 0,1, \quad \alpha = 5,7^\circ$$

Um den Körper die Ebene hinaufzuziehen, muß eine Zugkraft F_Z angewendet werden. Vernachlässigt man die Reibung, so muß sie größer sein als die Hangabtriebskraft:

$$F_Z > F_H, \text{ d. h. } F_Z > F_G \cdot \sin \alpha \quad (2-28)$$

Berücksichtigt man die Reibung ($F_R = \mu \cdot F_N = \mu F_G \cdot \cos \alpha$), so muß die Zugkraft größer sein als die Summe von Reibungs- und Hangabtriebskraft:

$$F_Z > F_H + F_R = F_G \cdot \sin \alpha + \mu F_G \cdot \cos \alpha, \quad (2-29)$$

also

$$F_Z > F_G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = mg \left(\frac{h}{l} + \mu \cdot \frac{b}{l} \right) \quad (2-30)$$

Beispiel: Ein Faß der Masse $m = 60 \text{ kg}$ wird über eine Rampe der Länge $l = 2,6 \text{ m}$ auf einen Wagen der Höhe $h = 1 \text{ m}$ gerollt, der Reibungskoeffizient ist $\mu = 0,1$. Wie groß ist die Kraft F_Z , die zum Hinaufrollen überschritten werden muß?

$$\sin \alpha = h / l = 0,385, \rightarrow \alpha = 22,6^\circ, \cos \alpha = 0,923$$

$$F_Z = F_G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 60 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 (0,385 + 0,1 \cdot 0,923) = 281 \text{ N}$$

2.7 Federkraft und Hookesches Gesetz

Je stärker eine Schraubenfeder gedehnt wird, desto größer ist die dafür notwendige Kraft; sie ist proportional der Längenänderung Δl :

$$F \sim \Delta l \quad (2-31)$$

Den von der Größe und dem Material der Feder abhängigen Proportionalitätsfaktor nennt man die *Federkonstante* D . Es ist also

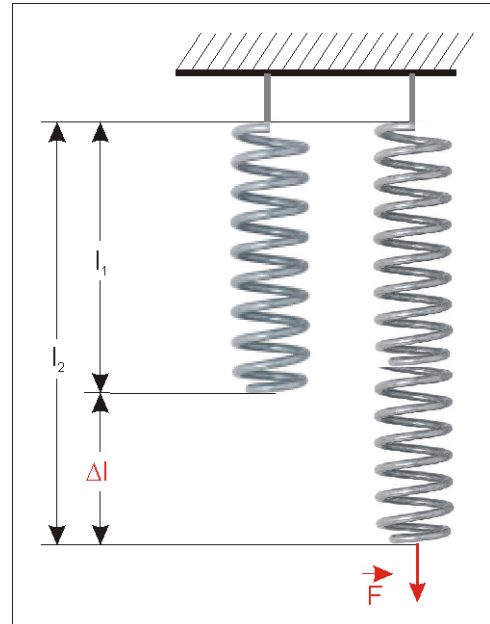
$$F = D \cdot \Delta l. \quad (2-32)$$

In der Form

$$\Delta l = F / D \quad (2-33)$$

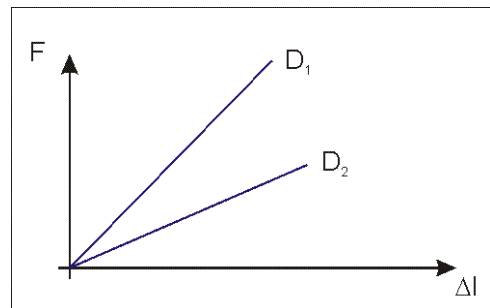
nennt man dies das *Hookesche Gesetz*³. Die Einheit der Federkonstanten ergibt sich zu

$$[D] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{N}{m}. \quad (2-34)$$



Der Kehrwert der Federkonstanten ist die *Nachgiebigkeit* der Feder.

Abb. 2-xx: Die Feder mit der Federkonstanten D_1 ist „härter“ als die mit D_2 : man muß zu ihrer Dehnung eine größere Kraft aufwenden.



Beispiel: Welche Verlängerung verursacht eine Kraft von 6,8 N an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 0,34 \text{ N/cm}$?

$$\Delta l = \frac{F}{D} = \frac{6,8 \text{ N}}{0,34 \text{ N/cm}} = 20 \text{ cm}$$

Beispiel: Die Pufferfeder eines Eisenbahnwaggons wird von der Kraft $F_1 = 12 \text{ kN}$ um 30 mm zusammengedrückt.

- Wie groß ist die Federkonstante?
- Welche Kraft F_2 würde die Feder um 10 cm zusammendrücken?

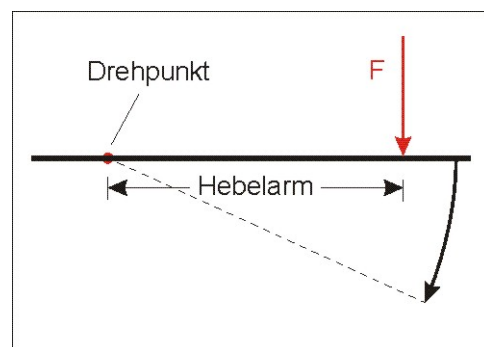
³ Dies ist die einfachste, auf eine Dimension beschränkte Form des Hookeschen Gesetzes. In seiner dreidimensionalen Form beschreibt es die Formveränderung beliebiger Körper.

$$\text{a) } D = \frac{F}{\Delta l} = \frac{1,2 \cdot 10^4 \text{ N}}{3 \text{ cm}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$\text{b) } F = D \cdot \Delta l = 4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \cdot 10 \text{ cm} = 40 \text{ kN}$$

2.8 Hebel und Drehmoment

Jeder Körper, an dem eine Kraft eine Drehbewegung verursachen kann, ist im physikalischen Sprachgebrauch ein *Hebel*. Der zur Krafrichtung senkrechte Abstand zwischen Drehpunkt und Kraftangriffspunkt heißt *Hebelarm*.



Die Einwirkung der Kraft bewirkt die Drehung des Hebels um die Drehachse.

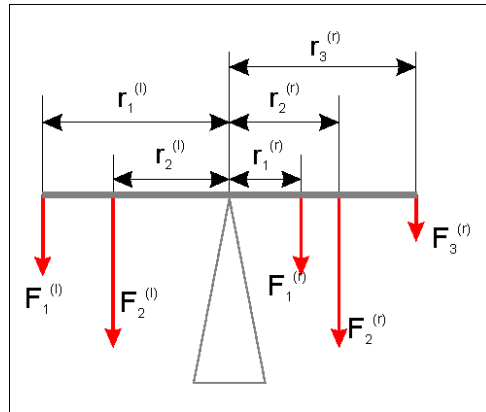
Die Drehwirkung wird durch das *Drehmoment* M beschrieben. Es wächst sowohl mit der Zunahme der Kraft F als auch mit der Länge des Hebelarms r :

$$M = F \cdot r, \quad (2-35)$$

Das Drehmoment wird in Newtonmeter gemessen:

$$[M] = [F] \cdot [r] = 1 \text{ Nm}. \quad (2-36)$$

Mehrere Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten bewirken mehrere Drehmomente, die sich bei geeignetem Ausräumen gegenseitig aufheben. Als Beispiel betrachten wir einen in der Mitte unterstützten Balken, auf den in verschiedenen Entfernungen vom Auflager mehrere, z. B. durch angehängte Gewichte verursachte Kräfte wirken.



Die Kräfte auf der linken Seite seien $F_1^{(l)}$ und $F_2^{(l)}$ in den Entfernungen $r_1^{(l)}$ und $r_2^{(l)}$ vom Drehpunkt. Rechts wirken in den Entfernungen $r_1^{(r)}$, $r_2^{(r)}$, $r_3^{(r)}$ die Kräfte $F_1^{(r)}$, $F_2^{(r)}$, $F_3^{(r)}$.

Der Balken bleibt in waagerechter Stellung, wenn

$$F_1^{(l)} \cdot l_1^{(l)} + F_2^{(l)} \cdot l_2^{(l)} = F_1^{(r)} \cdot l_1^{(r)} + F_2^{(r)} \cdot l_2^{(r)} + F_3^{(r)} \cdot l_3^{(r)} \quad (2-37)$$

oder

$$M_1^{(l)} + M_2^{(l)} = M_1^{(r)} + M_2^{(r)} + M_3^{(r)} \quad (2-38)$$

gilt (*Hebelgesetz*).

Am Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der linksdrehenden Drehmomente gleich der Summe der rechtsdrehenden ist.

$$\sum_1^n M_i^{(l)} = \sum_1^m M_k^{(r)} \quad (2-39)$$

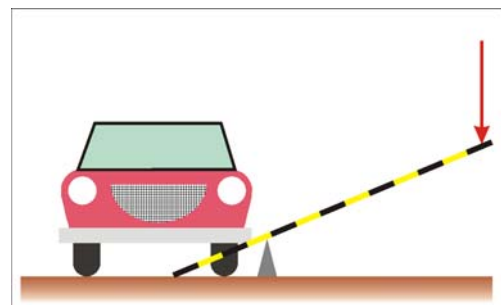
Das Hebelgesetz beschreibt unter anderem, wie mit relativ wenig Kraftaufwand schwere Lasten gehoben werden können. Man nennt den Abstand zwischen Drehpunkt und Kraftangriffspunkt *Kraftarm*, den Abstand zwischen Drehpunkt und Last *Lastarm*.

Welche Kraft F_x ist aufzuwenden, um den skizzierten Kleinwagen der Masse $m = 600 \text{ kg}$ anzuheben? Zur Verfügung steht ein Hebel mit einem Lastarm $l_1 = 50 \text{ cm}$, die Kraft greift in 2 m Entfernung vom Drehpunkt an (Kraftarm l_2). Die Gewichtskraft des Wagens beträgt

$$F_G = m \cdot g = 600 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 6 \text{ kN}.$$

Da der Wagen aber auf den linken Rädern stehen bleibt, ist nur die halbe Gewichtskraft anzusetzen, also 3 kN . Mit

$$\frac{1}{2} F_G \cdot l_1 = F_x \cdot l_2,$$



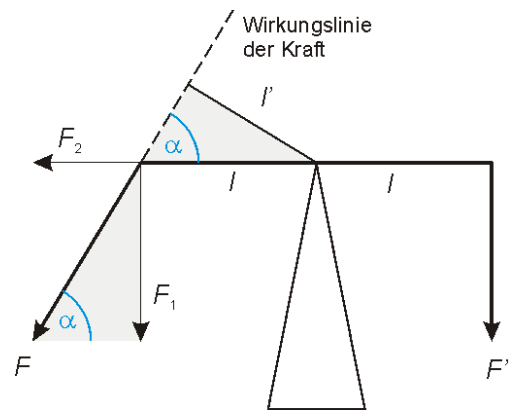
errechnet man

$$F_x = \frac{F_1 \cdot l_1}{l_2} = \frac{3000 \text{ N} \cdot 0,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 750 \text{ N}.$$

Eine 75 kg schwere Person würde das mit ihrem ganzen Gewicht schaffen, die Verwendung eines hydraulischen Wagenhebers ist aber offensichtlich praktischer.

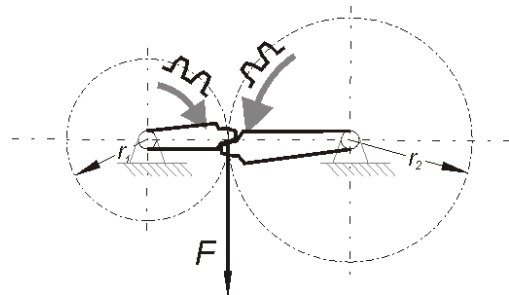
Wie berechnet man das Drehmoment, wenn der Winkel zwischen der einwirkenden Kraft und dem Hebelarm kein Rechter ist?

Die längs der Wirkungslinie angreifende Kraft F wird in die Komponenten F_1 und F_2 zerlegt. F verhält sich zu F_1 wie die Längen l und l' in dem oberen Dreieck (Stufenwinkel α). Damit läßt sich das Drehmoment M leicht berechnen.



$$\frac{F}{F_1} = \frac{l}{l_1} \Rightarrow F \cdot l' = F_1 \cdot l = M \quad (2-40)$$

Ein Zahnradpaar kann als fortlaufende Wirkung eines Doppelhebels betrachtet werden. Die Zahnkraft F bleibt bei Übertragung auf das zweite Rad (rechts) gleich groß, wirkt aber an dem längeren Hebelarm r_2 . Das bewirkt, daß das Drehmoment des rechten Rades größer ist als der des linken.



$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{F \cdot r_2}{F \cdot r_1} = \frac{r_2}{r_1} = i \quad (2-41)$$

Das Verhältnis der beiden Drehmomente zueinander ist das Übersetzungsverhältnis i des Getriebes; jedes Getriebe ist ein Drehmoment-Wandler.

Arbeit, Energie, Leistung

3.1 Arbeit

3.2 Energie

3.3 Leistung

Arbeit und Energie sind zentrale Begriffe der Physik überhaupt. Ihre Behandlung in der Mechanik gibt lediglich einen ersten Einstieg und stellt diese grundlegenden Konzepte an Beispielen vor. In den Bänden zur Elektrizität und zur Wärmelehre werden sie uns Wiederbegegnen; auch in den „höchsten Sphären“, der Relativitäts-, Quanten- und Stringtheorie sind sie unabdingbare Arbeitsmittel.

3.1 Arbeit

Im Alltag würde man z. B. von Arbeit sprechen, wenn ein Dachdecker eine Ladung Ziegel auf das Dach eines Hauses trägt oder ein Pferd einen Wagen mit Fässern von der Brauerei zum Festzelt zieht. Benutzt der Dachdecker einen Lastenaufzug oder werden die Fässer mit dem Lkw transportiert, so wird das gleiche Ergebnis erzielt. Es handelt sich in beiden Fällen darum, Gegenstände unter Kraftaufwand zu bewegen. Die aufzubringende Kraft ist immer einer anderen Kraft entgegengesetzt: die Arbeit des Dachdeckers oder des Aufzugs wird gegen die Gravitationskraft verrichtet, die Arbeit des Pferdes oder des Motors wird gegen die auf der Straße stets wirkende Reibungskraft verrichtet.

Wirkt eine Kraft auf einen Körper und bewegt diesen entgegen der Einwirkung einer entgegengesetzt gerichteten Kraft, so wird an ihm *Arbeit* verrichtet.

Je höher die aufzuwendende Kraft und je länger die Strecke, desto mehr Arbeit wird verrichtet: sie ist proportional zur Kraft F und zum Weg s . Sofern die Kraft parallel zum Weg ist und sich während der Verschiebung nicht ändert, ist Arbeit im physikalische Sinn das Produkt aus aufzuwendender Kraft und zurückgelegtem Weg.

$$W = F \cdot s. \quad (3-1)$$

In diesem einfachen Fall genügt es, die Beträge der vektoriellen Größen F und s zu benutzen. Auf den Fall, daß die Richtungen von Kraft und Weg nicht dieselben sind, kommen wir noch zu sprechen.

Die Einheit der Arbeit ist das *Newtonmeter* oder das *Joule* (J), das sich als

Produkt aus Krafteinheit und Längeneinheit definiert:

$$[W] = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ Nm} =: 1 \text{ J.} \quad (3-2)$$

Arbeit wird je nach Art der zu überwindenden Kraft auf unterschiedliche Arten geleistet, z. B. als Hubarbeit, Reibungsarbeit, Spannarbeit oder Beschleunigungsarbeit (wozu nicht nur die Überwindung der Trägheit gehört, sondern jegliche zur Änderung eines Bewegungszustandes nötige Arbeit).

Hubarbeit W_H

Wird ein Körper der Masse m emporgehoben, so wird längs des Höhenunterschiedes h die *Hubarbeit* W_H gegen die Gravitationskraft F_G verrichtet (Abbildung 1).

$$W_H = F_G \cdot h. \quad (3-3)$$

Mit $F_G = m \cdot g$ lautet daher die Formel für die Hubarbeit

$$W_H = m \cdot g \cdot h. \quad (3-4)$$

Beispiel: Ein Bleiklotz von 20 kg soll 3 m emporgehoben werden. Wie groß ist die aufzuwendende Hubarbeit?

$$m = 20 \text{ kg}, h = 3 \text{ m}, g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$W_H = mgh = 20 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ m} = 600 \text{ J}$$

Die Hubarbeit ist außer von der Masse m (und natürlich der konstanten Fallbeschleunigung g) nur von der Höhendifferenz h abhängig. Dabei spielt es übrigens keine Rolle, auf welchem Weg das Anheben eines Körpers erfolgt, und wie lang die zurückgelegte Strecke ist: Auf den drei Wegen 1, 2 und 3 wird dieselbe Arbeit verrichtet (Abbildung 2).

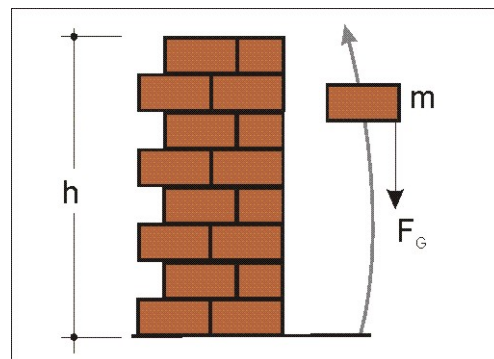


Abb. 1: Um den Ziegel m auf die Mauer zu heben, muß Arbeit $W_H = mgh$ gegen die Gravitationskraft verrichtet werden.

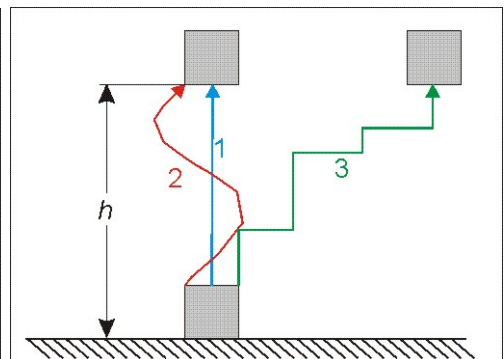


Abb. 2.: Die Hubarbeit hängt nur vom Höhenunterschied h , nicht aber vom zurückgelegten Weg und seiner Länge ab.

Entsprechend gilt für die schiefe Ebene, daß zwar eine geringere Kraft erforderlich ist, die aber mit einem längeren Weg erkauft werden muß.

Reibungsarbeit

Beim Verschieben eines Körpers auf einer Unterlage um die Strecke s ist die Reibungskraft F_R zu überwinden (Vgl. Kapitel 2, Dynamik). Mit $F_R = \mu \cdot m \cdot g$, wobei μ der materialabhängige Reibungskoeffizient ist, ergibt sich die dabei aufzuwendende Arbeit zu

$$W_R = F_R \cdot s = \mu \cdot m \cdot g \cdot s. \quad (3-5)$$

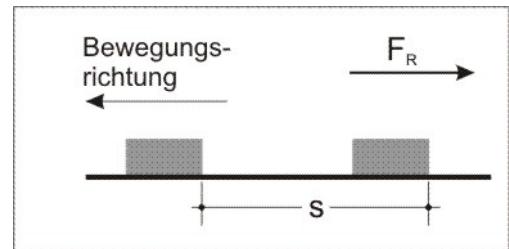


Abb. 1 Reibungsarbeit: Überwindung der Reibungskraft

Ebenso wie die Reibungskraft ist die Reibungsarbeit nicht von der Auflagefläche des Körpers abhängig. Im Falle der schiefen Ebene ist natürlich F_G durch die Normalkraft F_N zu ersetzen. Analog gilt für die Überwindung des Rollwiderstands

$$W_{RR} = F_{RR} \cdot s = \mu_{RR} \cdot F_G \cdot s \quad \text{bzw.} \quad W_{RR} = \mu_{RR} \cdot F_N \cdot s \quad (3-6), (3-6a)$$

Spannarbeit an einer Feder

Beim Spannen einer Feder ist die Arbeit nicht konstant, denn die aufzuwendende Kraft wächst von $F_{\text{Anf}} = 0$ bis zu einem Maximalwert $F_{\text{End}} = D \cdot \Delta l$. Da dieses Anwachsen der Kraft gleichmäßig vonstatten geht, kann man zur Berechnung der Spannarbeit den Mittelwert $F^{(m)}$ einsetzen:

$$F^{(m)} = \frac{D \cdot \Delta l}{2}. \quad (3-7)$$

Die Spannarbeit W_{Sp} ergibt sich damit wie folgt:

$$\begin{aligned} W_{\text{Sp}} &= F^{(m)} \cdot \Delta l \\ &= \frac{1}{2} D \cdot \Delta l \cdot \Delta l = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2 \quad (3-8) \end{aligned}$$

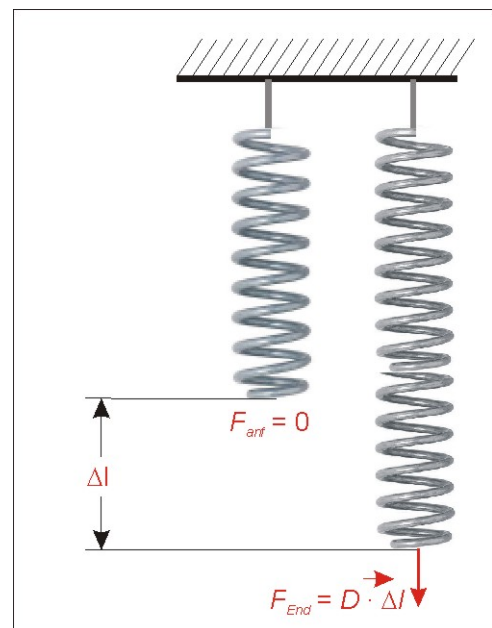


Abb. 2: Arbeit bei der Dehnung einer Feder

Beispiel: Welche Arbeit ist erforderlich, um eine Feder mit $D = 0,34 \text{ N/cm}$ um 20 cm zu dehnen?

$$W_{\text{Sp}} = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,34 \text{ N/cm}\right) \cdot (20 \text{ cm})^2 = 68 \text{ N} \cdot \text{cm} = 0,68 \text{ J}$$

Beschleunigungsarbeit

Die bei der Beschleunigung eines Körpers aufzuwendende Kraft ist

$$F_B = m \cdot a. \quad (3-9)$$

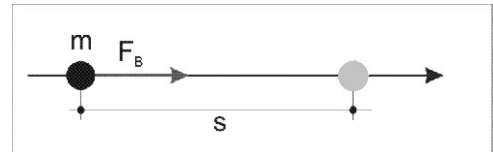


Abb. 3: Beschleunigung einer Masse über die Strecke s

Wie aus der Kinetik bekannt ist, wird während der Beschleunigung aus der Ruhezustand die Strecke

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (3-10)$$

zurückgelegt. Somit erhalten wir für die Beschleunigungsarbeit:

$$W_B = F_B \cdot s = (ma) \cdot \left(\frac{1}{2} at^2\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (at)^2 = \frac{m}{2} v^2 \quad (3-11)$$

Wie man sieht, ist die Beschleunigungsarbeit nicht von der Größe der beschleunigenden Kraft, sondern nur von der erreichten (End)geschwindigkeit abhängig.

Beispiel: Welche Beschleunigungsarbeit muß geleistet werden, um ein Auto der Masse 1,5 t auf eine Geschwindigkeit von 72 km/h zu bringen?

$$m = 1500 \text{ kg}, v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 750 \text{ kg} \cdot (20 \text{ m/s})^2 = 750 \text{ kg} \cdot 400 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 300000 \text{ Nm} = 300 \text{ kJ}$$

Die Arbeit als Skalarprodukt

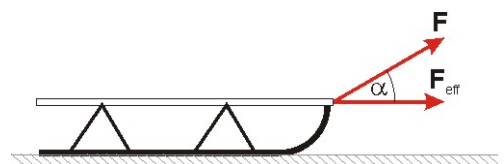
Bisher hatten wir den Fall behandelt, daß die Kraft F und der Weg s parallel zueinander sind. Häufig kommt es aber vor, daß beide einen Winkel miteinander bilden. In diesem Fall ist nur der in Bewegungsrichtung wirkende Teil F_{eff} des Kraftvektors zu berücksichtigen, dies ist seine Projektion auf die Bewegungsrichtung:

$$F_{\text{eff}} = F \cdot \cos \alpha \quad (3-12)$$

Damit wird die zum Ziehen notwendige Arbeit zu:

$$W = F_{\text{eff}} \cdot s = F \cdot \cos \alpha \cdot s. \quad (3-13)$$

Beispiel: Ein Schlitten der Gesamtmasse 100 kg wird reibungsfrei mit einer Kraft von 200 N an einer Schnur unter einem Winkel von 30° über eine Strecke von 100 m gezogen. Wie groß ist die Beschleunigung und welche Arbeit wird dabei ver-



richtet?

$$a = \frac{F_{\text{eff}}}{m} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{m} = \frac{200 \text{ kgm/s}^2 \cdot \cos 30^\circ}{100 \text{ kg}} \approx 2 \cdot 0,87 \text{ m/s}^2 = 1,73 \text{ m/s}^2$$

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha = 200 \text{ N} \cdot 100 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ = 17,3 \text{ J}$$

Sind F und s parallel, so ist $\alpha = 0$, also $\cos \alpha = 1$ und $W = F \cdot s$. Allgemein ausgedrückt, stellt W eine Multiplikation zweier Vektoren dar. Das Ergebnis ist ein Skalar vom Betrag $F \cdot \cos \alpha \cdot s$ (Man nennt dieses Produkt *Skalarprodukt*. Es gibt noch eine andere Art der Vektormultiplikation, *das Vektorprodukt*, dessen Ergebnis ein Vektor ist.)

Beispiel: Welche Arbeit wird verrichtet, wenn die angreifende Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung angreift?

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha = F \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Nichts anderes war zu erwarten. Zur Veranschaulichung können Sie sich einen Eisenbahnwaggon vorstellen, auf den eine Kraft quer zum Verlauf der Schienen wirkt.

3.2 Energie

Die beim Heben investierte Arbeit ist nicht „verschwunden“, sondern hat den Körper in einen Zustand versetzt, in dem dieser durch Herabfallen seinerseits Arbeit zu verrichten vermag. So kann z. B. ein zuvor emporgehobener Hammer an einem Werkstück Verformungsarbeit verrichten, wie es beim Schmieden geschieht. Oder eine gespannte Feder vermag ein Uhrwerk anzutreiben. Der Arbeitsaufwand hat sich also in Arbeitsfähigkeit umgewandelt. Dieses Arbeitsvermögen nennt man *Energie*.

Die Fähigkeit eines Körpers oder eines Systems, Arbeit zu verrichten, heißt Energie.

Analog zu den besprochenen Arten der Arbeit lassen sich verschiedene Arten der Energie definieren.

Lageenergie

Die Fähigkeit eines angehobenen Körpers, beim Herabfallen Arbeit zu verrichten, heißt *Lageenergie* (E_L), und es gilt:

$$E_L = W_H \tag{3-14}$$

$$E_L = m \cdot g \cdot h \tag{3-15}$$

Die investierte Arbeit W_H tritt hier als Energie E_L auf: Beides sind gleichartige physikalische Größen, sie werden in den gleichen Einheiten gemessen:

$$[E_L] = [m] \cdot [g] \cdot [h] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} = [W] \quad (3-16)$$

Deswegen findet man für die Benennung der Energie auch oft das Formelzeichen W statt E .

Neben dem erwähnten Hammer findet man eine solche Energieform z. B. auch bei einer Standuhr, deren Uhrwerk von einem langsam nach unten sinkenden Gewichten angetrieben wird, oder in einem Pumpspeicherwerk; dort wird bei einem Überschuß an Elektrizität Wasser in die Höhe gepumpt, während bei hohem Bedarf das fallende Wasser Elektrizität erzeugt. Es wird also Arbeitsvermögen gespeichert, in diesem Fall wird elektrische Energie als Lageenergie gespeichert.

Beispiel: Man berechne die Hubarbeit, die aufzuwenden ist, um 1,4 t Kies 4,2 m hochzuschaukeln. Welche Lageenergie hat der Kies gewonnen?

$$W_H = mgh = 1,4 \text{ t} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 4,2 \text{ m} = 58,8 \text{ kJ}$$

Genau dies ist auch der Zuwachs an Lageenergie.

Um einen Körper von einem tiefer gelegenen Punkt der Höhe h_1 auf ein höheres Niveau h_2 zu bringen, ist die Arbeit

$$W_H = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \quad (3-17)$$

nötig; damit wird der Energiezuwachs zwischen den beiden Niveaus beschrieben. Das bedeutet zugleich, daß die Lageenergie nur in Bezug auf ein willkürlich festgelegtes Niveau, das *Nullniveau*, angegeben werden. Man kann den Erdboden als Nullniveau annehmen und von dort aus die Höhe h messen; ebensogut kann man den Fußboden des zehnten Etage als Nullniveau festlegen und berechnen, wie groß die Lageenergie einer Masse ist, die sich 2 m über dem Boden befindet.

Spannenergie

Die Fähigkeit einer gespannten Feder, Arbeit zu verrichten, heißt *Spannenergie*. Sie ist proportional der Dehnung der Feder.

$$E_{\text{Sp}} = W_{\text{Sp}} = (D/2) \cdot \Delta l^2 \quad (3-18)$$

Es muß sich dabei durchaus nicht um eine Spiralfeder, wie sie im Abschnitt über Spannarbeit gezeigt wurde, handeln. Spannenergie kann z. B. auch in der Sehne eines Bogen, in einer Blattfeder, überhaupt in jedem verformbaren Gegenstand stecken, der elastisch ist, d. h. nach Verformung in seine vorherige Form zurückkehrt. Man spricht daher auch von *elastischer Energie*, *Deformations-* oder *Verformungsenergie*.

Beispiel.: Die früher besprochene Feder ($D = 0,34 \text{ N/m}$, $\Delta l = 20 \text{ cm}$), an der eine Spannarbeit von 0,68 J verrichtet wurde, besitzt im angespannten Zustand eine Spannenergie von 0,68 J.

Die Lageenergie und die Spannenergie sind gewissermaßen für einen späteren Gebrauch gespeichert, sie werden daher auch als *potentielle Energie* E_{pot} bezeichnet.

Kinetische Energie (Bewegungsenergie)

Auch die in die Beschleunigung eines Körpers investierte Arbeit steht als Energie zur Verfügung, es ist die *Bewegungsenergie* oder *kinetische Energie* E_{kin} . Sie ist so groß wie die Beschleunigungsarbeit W_B :

$$E_{\text{kin}} = W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (3-19)$$

Beim Bremsen eines Fahrzeugs wird dessen kinetische Energie in Reibungsarbeit umgesetzt, die ihrerseits wieder als Wärmeenergie abgegeben wird; die Temperatur der Brems Scheiben kann mehrere hundert Grad erreichen. Eine Umwandlung kinetischer Energie in Deformationsenergie leistet die Knautschzone eines Autos; dadurch wird erreicht, daß die Fahrgastzelle weniger Energie aufnehmen muß und formstabil bleibt.

Beispiel: Welche kinetische Energie hat ein Auto der Masse 1,5 t, welches mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h (20 m/s) fährt?

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = 750 \text{ kg} \cdot 20^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 300 \text{ kJ}$$

Erhaltung der mechanischen Energie

Bei einem fallenden Körper wird seine potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt; ebenso wird die Bewegungsenergie eines in einen Unfall verwickelten Fahrzeugs beim Bremsen in Wärmeenergie und die verbleibende kinetische Energie in Verformungsenergie umgewandelt. Auch bei einem einfachen Pendel ist eine Umwandlung der Energiearten zu beobachten: bei der maximalen Auslenkung aus der Ruhelage steht es für einen Moment still und hat seine maximale potentielle Energie; an seinem tiefsten Punkt ist es am schnellsten und hat seine maximale kinetische Energie. Es werden also beide Energiearten kontinuierlich ineinander umgewandelt. Bei jedem mechanischen Vorgang ist die Summe aller Energiearten konstant:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}. \quad (3-20)$$

Dies ist der *Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie*.

Bei keinem mechanischen Vorgang, der reibungsfrei abläuft, kann mechanische Energie gewonnen oder vernichtet werden. Die einzelnen Energiearten können aber ineinander überführt werden.

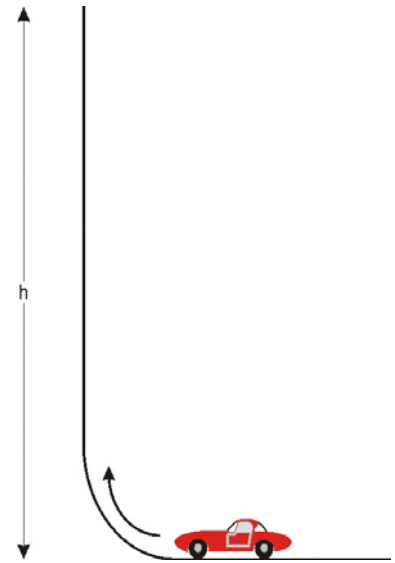
Sollte eine Rechnung etwas anderes ergeben, ist entweder Reibung im Spiel (Bewegungsenergie wird in Wärme umgewandelt) oder die zu Grunde liegende Überlegung ist falsch.

Das Auto aus dem letzten Beispiel hat eine kinetische Energie von 300 kJ. Nehmen wir an, durch eine geeignet gebaute Rampe würde der Wagen auf eine senkrechte Wand umgelenkt werden. (Über die richtige Konstruktion der Rampe machen wir uns keine Gedanken, auch die Reibung vernachlässigen wir.) Wie hoch vermag das Auto auf Grund seiner kinetischen Energie die Wand hochzufahren?

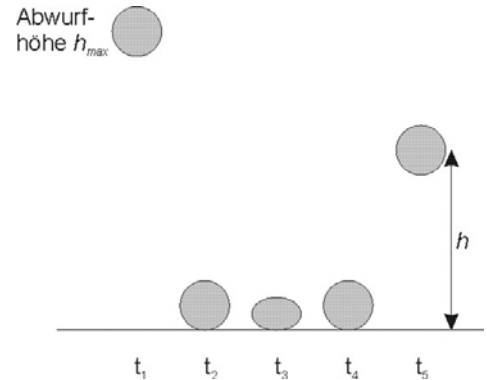
Unter der Voraussetzung, daß die kinetische Energie vollständig in Hubarbeit $W_{\text{Hub}} = mgh$ umgesetzt wird, ergibt sich

$$h = \frac{W}{mg} = \frac{300 \text{ kJ} \cdot \text{s}^2}{1500 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}} = 20 \text{ m}$$

Am höchsten Punkt steht hat der Wagen eine Lageenergie $E_L = 300 \text{ kJ}$, dann wird er durch die Gravitationskraft nach unten beschleunigt (Beschleunigungsarbeit), bis er schließlich wieder die Ausgangsenergie $E_{\text{kin}} = 300 \text{ kJ}$ hat und sich mit 20 m/s rückwärts entfernt (sofern er diese „Zirkusnummer“ überlebt hat).



Ein elastischer Ball wird aus der Höhe h_{max} (Zustand bei t_1), wo er seine maximale Lageenergie E_L hat, fallengelassen. Er trifft mit der maximalen Geschwindigkeit v_{max} auf den Boden auf (Zustand bei t_2), wird etwas zusammengedrückt (Zustand bei t_3), wobei an ihm Spannarbeit verrichtet wird (D hängt vom Material ab, l ist der Betrag, um den der Ball zusammengedrückt wird). Er nimmt danach wieder seine runde Form an (Zeitpunkt t_4) und springt bis zur Höhe h , wobei $h < h_{\text{max}}$ (Zeitpunkt t_5).



Zustand	E_L	E_{kin}	E_{Sp}
1	$m \cdot g \cdot h_{\text{max}}$	0	0
2	0	$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{max}}^2$	0
2	0	0	$D/2 \cdot \Delta l^2$
4	0	$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{max}}^2$	0
5	$m \cdot g \cdot h$	$\frac{1}{2} m \cdot v^2$	0

Reibungsfreiheit vorausgesetzt, ist die Gesamtenergie zu jedem Zeitpunkt die Summe aus der Lageenergie, der Spannenergie und der kinetischen Energie:

$$E_{\text{ges}} = E_L + E_{\text{kin}} + E_{\text{Sp}} \quad (3-21)$$

3.3 Leistung und Wirkungsgrad

Leistung

Zu Beginn des Abschnitts über die Arbeit war vom Transport der Fässer von der Brauerei zum Festzelt die Rede, sowie von der Möglichkeiten, dies durch ein Fuhrwerk oder durch einen Lkw erledigen zu lassen. Die Arbeit ist bei beiden Methoden die gleiche, der Unterschied liegt in der für den Transport benötigten Zeit. Dieser Umstand wird mit dem Begriff der *Leistung* erfaßt: Leistung ist das Verhältnis der Arbeit zur dafür benötigten Zeit:

$$P = W / t. \quad (3-22)$$

Die Einheit der Leistung ist das Watt (W):

$$[P] = 1 \text{ J/s} =: 1 \text{ W} \quad (3-23)$$

Beispiel: Welche Leistung ist erforderlich, um eine Körper der Masse 0,5 t in 30 s auf eine Höhe von 15 m zu heben?

$$W_H = mgh = 500 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 15 \text{ m} = 75 \text{ kJ}$$

$$P = W/t = 75 \text{ kJ} / 30 \text{ s} = 2500 \text{ W} = 2,5 \text{ kW}$$

(Auch beim Alltagsbegriff der Arbeit im Sinne von Erwerbstätigkeit gilt: das Gehalt richtet sich im Idealfall nach der Leistung, nicht nach der Arbeit.)

Eine ältere, nicht SI-konforme Leistungseinheit, die noch in der Kraftfahrzeugtechnik verwendet wird, ist die *Pferdestärke*, das PS. Das ist die Leistung, die erbracht werden muß, um 75 kg in 1 s um 1 m anzuheben. Die zu verrichtende Arbeit ist

$$W = m \cdot g \cdot h = 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} \approx 736 \text{ J}$$

und Division durch 1 s liefert den Näherungswert

$$1 \text{ PS} \approx 736 \text{ W} \approx \frac{3}{4} \text{ kW}. \quad (3-24)$$

Eine nähere Betrachtung der Gleichung (3-22) zeigt

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v, \quad (3-25)$$

das heißt, daß bei gegebener Kraft eine bestimmte Leistung nötig ist, um eine gewünschte Geschwindigkeit zu erreichen.

Die bei gegebener Leistung in der Zeit t verrichtete Arbeit ist

$$W = P \cdot t, \quad (3-26)$$

eine Betrachtung der Einheiten liefert neben dem Joule und dem Newtonmeter als weitere Einheit der Arbeit die *Wattsekunde*:

$$[W] = 1 \text{ W} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ Ws}. \quad (3-27)$$

Wirkungsgrad

Wir haben in den bisherigen Beispielen der Einfachheit halber immer Reibungsfreiheit vorausgesetzt. Tatsächlich ist diese aber nie gegeben; gerade bei energieumformenden Maschinen ist die abgegebene *Nutzleistung* P_{out} stets kleiner als die zugeführte Leistung P_{in} .

Das Verhältnis zwischen diesen beiden ist der *Wirkungsgrad* η :

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}. \quad (3-28)$$

Der Wirkungsgrad ist *immer*, auch bei angenommener, aber nie zu verwirklichter, Reibungsfreiheit, kleiner als 1. (Bei einem hypothetischen *perpetuum mobile* wäre sie größer als oder zumindest gleich 1.)

Die Differenz zwischen investierter und abgegebener Leistung nennt man *Verlustleistung* (oder kurz *Verlust*). Sie wird zum weitaus überwiegenden Teil als Wärme abgegeben.

$$P_{Verlust} = P_{in} - P_{out}. \quad (3-29)$$

Statt mit der Leistung kann man den Wirkungsgrad auch als das Verhältnis von erzielter zu aufgewandter Arbeit ausdrücken, :

$$\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}}. \quad (3-30)$$

Beispiel 1: Welchen Wirkungsgrad besitzt eine geneigte Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 15^\circ$ und dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,2$?

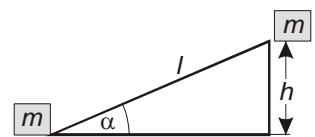
$W_{out} = m \cdot g \cdot h$ (Das, was „hinten rauskommt“)

$$W_{in} = F_Z \cdot l = (F_H + F_R) \cdot l = F_G (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot l$$

$$\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} = \frac{m \cdot g \cdot h}{m \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot l} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}$$

(Hier wurde $\frac{h}{l} = \sin \alpha$ benutzt.)

$$\eta = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ + 0,2 \cdot \cos 15^\circ} = \frac{0,26}{0,26 + 0,2 \cdot 0,97} = 0,57 (= 57\%)$$



Beispiel 2: Eine elektrisch betriebene Pumpe fördert in der Minute 720 L Wasser auf eine Höhe von 15 m.

1. Welche Leistung wird von der Pumpe vollbracht?

2. Welche Leistung wird dem Stromnetz bei einem Wirkungsgrad von 80 % entnommen?

$$V = 720 \text{ L}, \rho = 1 \text{ kg/l}, h = 15 \text{ m}, \eta = 0,8$$

$$P_{Pumpe} = P_{Nutz} = ?, P_{Netz} = ?$$

ARBEIT, ENERGIE, LEISTUNG

$$P_{Nutz} = \frac{W_H}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{V\rho gh}{t}; P_{Netz} = \frac{P_{Nutz}}{\eta}$$

$$P_{Nutz} = \frac{720 \text{ L} \cdot 1 \text{ kg/L} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 15 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 1,80 \text{ kW}.$$

$$P_{Netz} = \frac{1,80 \text{ kW}}{0,8} = 2,25 \text{ kW}.$$

Die Differenz von 0,45 kW wird in Wärme umgewandelt.

Hydrostatik

- 4.1 Druck
- 4.2 Der hydrostatische Druck
- 4.3 Auftrieb und Archimedes
- 4.4 Hydraulik

4.1 Druck

Die in Kapitel 2 besprochene Gewichtskraft kann, je nachdem, auf welche Fläche sie wirkt, recht unterschiedliche Wirkung zeigen: ein Mensch sinkt im Pulverschnee mit den Füßen tief ein, mit Schneeschuhen oder Skiern aber nicht, weil die Gewichtskraft auf eine größere Fläche verteilt wird.

Die Wirkung einer Kraft läßt sich für viele Zwecke angemessen beschreiben, wenn man angibt, auf welche Fläche sie wirkt; man führt dazu als physikalische Größe den *Druck* ein: er ist definiert als Kraft pro Fläche. Sein Formelzeichen ist p (engl. *pressure*); seine Einheit ist das *Pascal* (Pa), der Quotient aus Kraft- und Flächeneinheit:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} =: 1 \text{ Pa} \quad (4-1)$$

Eine außerdem gebräuchliche Druckeinheit ist das Bar (Formelzeichen bar):

$$1 \text{ Bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

Ein anderes Beispiel für die Verteilung der Kraft auf eine große Fläche: Das Nagelbrett eines Fakirs besteht aus ca. 1000 Nägeln. Es handelt sich dabei nicht um spitze Stahlnägel, wie man sie üblicherweise kennt, sondern um sogenannte Zimmermannsnägel aus Holz, deren „Spitze“ fast $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ groß ist. Beträgt das Körpergewicht des Fakirs 50 kg, drückt jeder dieser Nägel mit 50 g auf die Haut. Es sind also keineswegs irgendwelche besonderen „fernöstlichen Geisteskräfte“, die dem Fakir das Liegen auf einem solchen Bett ermöglichen.

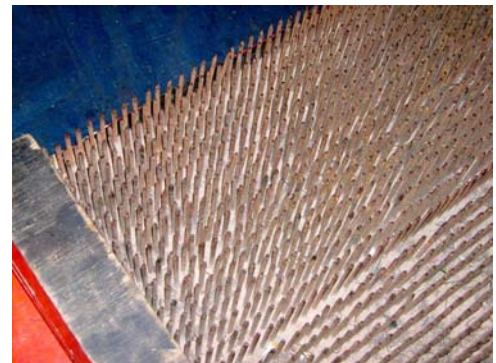


Abbildung 4-1: Nagelbrett

4.2 Der hydrostatische Druck

In einem flüssigkeitsgefüllten Gefäß übt die Gewichtskraft der Flüssigkeit einen Druck aus, und zwar nicht nur auf den Boden des Gefäßes, sondern auf jeden in die Flüssigkeit getauchten Körper und auf die Wände des Gefäßes. Dies ist der *hydrostatische Druck* oder *Schweredruck*. Auf eine Fläche A in der Tiefe h unter der Oberfläche der Flüssigkeit lastet eine Flüssigkeitssäule des Volumens $A \cdot h$, die mittels ihrer Gewichtskraft $F_{G,Fl}$ den folgenden Druck ausübt:

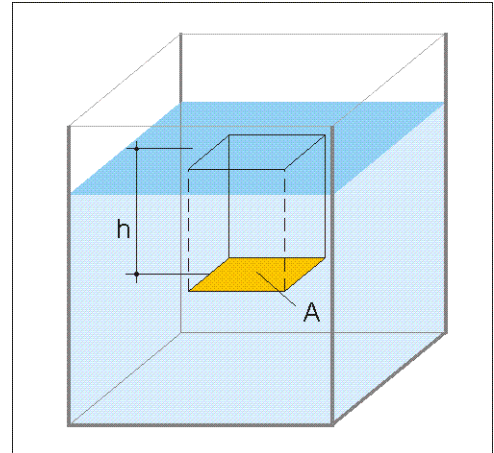


Abbildung 4-2: Die Flüssigkeitssäule mit dem Volumen $A \cdot h$

$$p = \frac{F_{G,Fl}}{A} = \frac{m_{Fl} \cdot g}{A} = \frac{V_{Fl} \cdot \rho_{Fl} \cdot g}{A} = \frac{A \cdot h \cdot \rho_{Fl} \cdot g}{A} = h \cdot \rho_{Fl} \cdot g, \quad (4-2)$$

kurz

$$p = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \quad (4-3)$$

Das heißt: außer von der Dichte der Flüssigkeit ist der hydrostatische Druck nur von der Tiefe (bzw. von der Höhe der Flüssigkeitssäule) abhängig, nicht aber von der Flüssigkeitsmenge im Behälter oder seiner Form. Man nennt dies das *hydrostatische Paradoxon*.

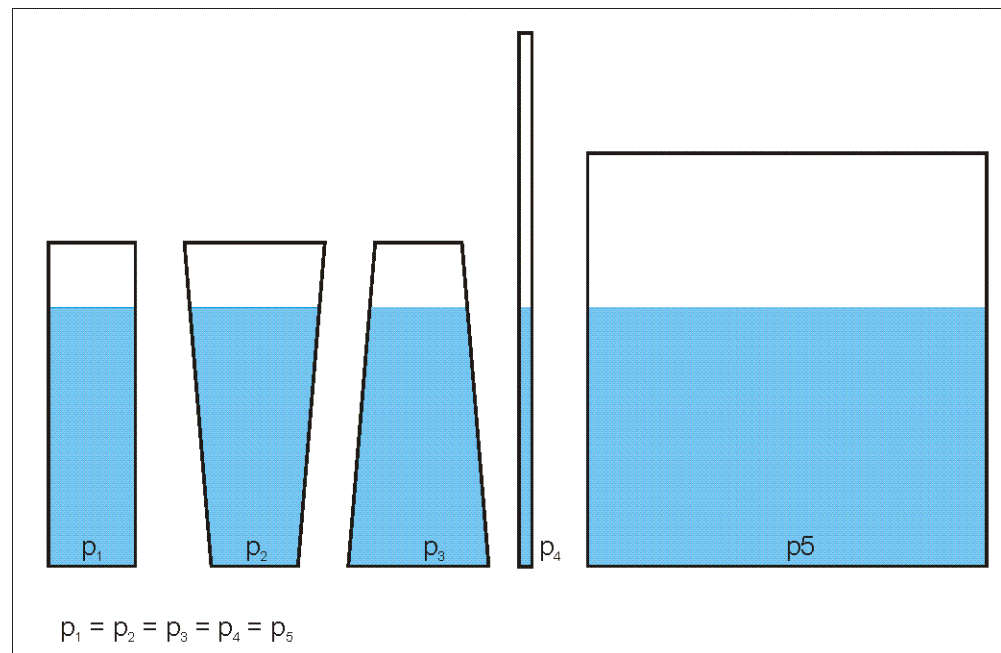


Abbildung 4-3: Der hydrostatische Druck ist von der Form des Gefäßes unabhängig.

Beispiel 1: Wie hoch muß eine senkrechte Wassersäule sein, damit an ihrem unteren Ende ein hydrostatischer Druck von 1 bar herrscht?

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{10^5 \text{ Nm}^{-2}}{10^3 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}} = \frac{10^2 \text{ m}}{9,81} = 10,2 \text{ m}$$

Beispiel 2: Wie hoch muß eine senkrechte Quecksilbersäule sein, damit an ihrem unteren Ende ein hydrostatischer Druck von 1013 hPa herrscht?

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}}{13,6 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ m}}{13,6 \cdot 9,81} = 0,76 \text{ m}$$

Viele Gesetze der Hydrostatik gelten auch für Gase, obwohl diese im Gegensatz zu den Flüssigkeiten kompressibel sind und ihr Druck (unter anderem) von ihrer Temperatur abhängt¹. „Wir leben am Grunde eines Ozeans aus Luft“ schrieb Torricelli 1640. Über jedem Quadratmeter Boden liegt eine Luftsäule mit einer Masse von etwa 10 Tonnen, die einen Druck von

$$p = \frac{F_G}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{10^4 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} = 10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ hPa} \quad (4-4)$$

ausübt; dies nennt man naheliegenderweise den *Luftdruck*. Er wird von den Meteorologen üblicherweise in Hektopascal (früher in Millibar) angegeben. Mit steigender Höhe nimmt der Luftdruck ab, denn dort lastet weniger Luft auf einem Quadratmeter (die Luft wird oben „dünnere“); als zweckmäßige Bezugsgröße hat man den Druck von 1013,25 hPa bei 15 °C als *Standard-* oder *Normaldruck* festgelegt.

In der Abbildung ist noch einmal das zweite Beispiel dargestellt. Am Punkt A wirkt der Luftdruck, am Punkt B ist der Druck genau so groß; das Quecksilber fließt nicht aus der Röhre. Die Angabe *760 mm Quecksilbersäule*, kurz *760 mm Hg*, entspricht dem Normaldruck von 1013 hPa. *1 mm Hg* ist die frühere Druckeinheit *1 Torr*.

Über den hydrostatischen Druck einer 760 mm hohen Quecksilbersäule wurde früher die Einheit *physikalische Atmosphäre* (1 atm) definiert. Ebenfalls nicht mehr zulässig ist die als

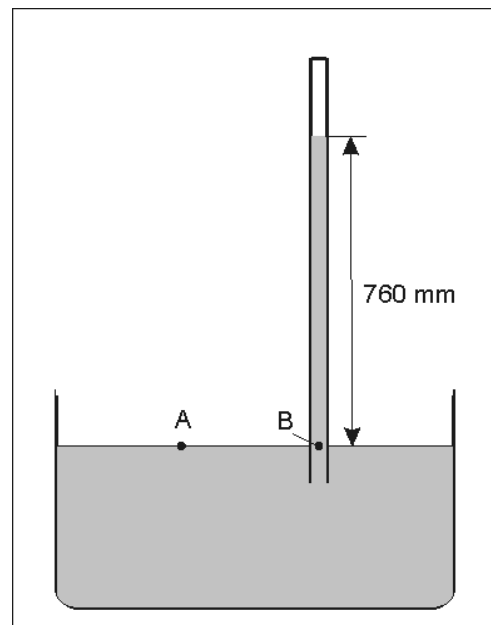


Abbildung 4- 4: Der hydrostatische Druck der Quecksilbersäule ist so groß wie der Luftdruck

¹ Näheres wird in der Wärmelehre besprochen.

der hydrostatische Druck einer 10 m hohen Wassersäule definierte *technische Atmosphäre* (1 at).

$$1 \text{ at} := 10 \text{ m WS} \approx 9.81 \text{ N}/10^4 \text{ m}^2 = 1 \text{ kp}/\text{cm}^2 = 981 \text{ hPa}$$

$$1 \text{ atm} := 760 \text{ Torr} \approx 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1013 \text{ hPa}$$

Lediglich im medizinischen Bereich, speziell bei der Blutdruckmessung, ist die Einheit *mm Hg* noch zulässig. International von Bedeutung für technische Anwendungen ist die US-amerikanische Druckeinheit psi (pounds per square inch, lb/in²), 1 psi \approx 7000 Pa.

4.3 Auftrieb und Archimedisches Prinzip

Die Auftriebskraft

Da in verschiedenen Tiefen verschiedener hydrostatischer Druck herrscht, werden auf einen in der Flüssigkeit befindlichen Körper in verschiedenen Tiefen auch verschiedene Kräfte ausgeübt. Was bewirkt die resultierende Kraft?

Auf die obere Deckfläche des untergetauchten Körpers wirkt die Kraft

$$F_1 = p_1 \cdot A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_1 \cdot A \quad (4-5)$$

nach unten. Auf die Bodenfläche wirkt die Kraft

$$F_2 = p_2 \cdot A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h_2 \cdot A \quad (4-6)$$

nach oben. Seitlich wirkende Kräfte heben sich gegenseitig auf. Bis auf h sind alle Größen, von denen die Kräfte abhängen, also ρ_{Fl} , g und A gleich groß. Da h_2 größer als h_1 ist,

ist F_2 größer als F_1 . Die resultierende Kraft wirkt also nach oben. Sie heißt *Auftriebskraft* F_A oder einfach *Auftrieb*:

$$F_A = F_2 - F_1 = (\rho_{Fl} \cdot g \cdot h_2 \cdot A) - (\rho_{Fl} \cdot g \cdot h_1 \cdot A)$$

$$= \rho_{Fl} \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1) = \rho_{Fl} \cdot g \cdot A \cdot h = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_K \quad (4-7)$$

kurz

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_K \quad (4-7a)$$

wobei V_K das Volumen des Körpers ist, d. h. der Auftrieb ist neben der Dichte der Flüssigkeit (und der Erdbeschleunigung) nur vom Volumen des Körpers abhängig. Anderen Eigenschaften des Körpers, weder seine Dichte noch

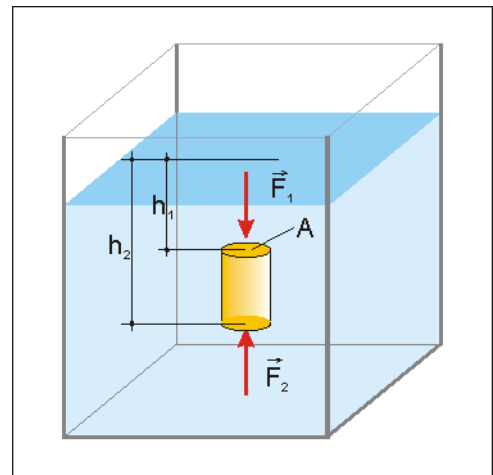


Abbildung 4- 5: Auftriebskraft

seine Form spielen dabei keine Rolle.

Der Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit gegebener Dichte hängt nur vom Volumen des Körpers ab.

Beispiel 1: Ein Stein der Masse $m = 12 \text{ kg}$ und der Dichte $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ wird in Wasser eingetaucht. Wie groß ist seine Gewichtskraft an der Luft und im Wasser?

$$\text{a) } F_G = m_{St} \cdot g = 12 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 117,72 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } F_A &= \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_{St} = \rho_{Fl} \cdot g \cdot m_{St} / \rho_{St} \\ &= 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (12 \text{ kg} / 2500 \text{ kg/m}^3) \\ &= 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (4,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= 9,81 \cdot 4,8 \text{ kg m / s}^2 \\ &= 47,09 \text{ N} \end{aligned}$$

Unter Wasser wirkt also nur eine Gewichtskraft von $117,72 \text{ N} - 47,09 \text{ N} = 70,63 \text{ N}$.

Das Archimedische Prinzip

Die Auftriebskraft ist

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_K \quad (4-7a)$$

wobei das Volumen V_K der Körpers gleich dem Volumen V_{Fl} der von ihm verdrängten Flüssigkeit ist, so daß

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V_{Fl} = \rho_{Fl} \cdot V_{Fl} \cdot g = m_{Fl} \cdot g = F_{G,Fl} \quad (4-8)$$

wobei letzteres die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist. Damit erhält man

$$F_A = F_{G,Fl}. \quad (4-9)$$

Diesen Sachverhalt nennt man das *Archimedische Prinzip*:

Der Auftrieb eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers ist gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Sinken, Schweben, Schwimmen

Ist die Gewichtskraft eines Körpers größer als die Auftriebskraft, sinkt er. Das Verhältnis von Gewichtskraft zu Auftriebskraft ist durch das Verhältnis der Dichte des Körpers zur Dichte der Flüssigkeit bestimmt (alle sich auf den Körper beziehenden Größen sind mit K indiziert):

$$\begin{aligned} F_G > F_A &\Rightarrow V_K \rho_K g > V_K \rho_{Fl} g \\ &\Rightarrow \rho_K > \rho_{Fl} \end{aligned} \quad (4-11)$$

Ein Körper sinkt also in einer Flüssigkeit, wenn seine Dichte größer ist als die Dichte der Flüssigkeit.

Ist die Gewichtskraft eines Körpers gleich der Auftriebskraft, schwebt er an jeder Stelle in der Flüssigkeit. Mit anderen Worten: ist die Dichte des Körpers gleich der Dichte der Flüssigkeit, schwebt der Körper.

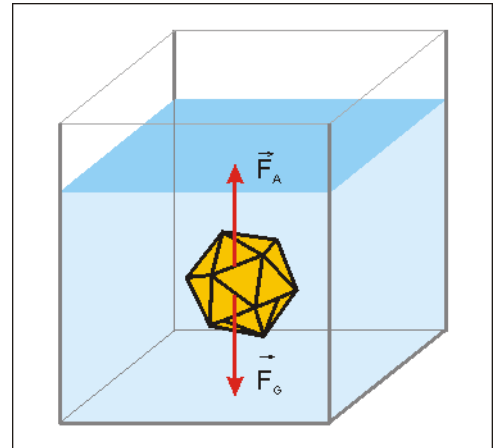


Abbildung 4- 6: Gewicht und Auftrieb

$$F_G = F_A \Rightarrow \rho_K = \rho_{Fl} \quad (4-12)$$

Ein Körper schwebt in einer Flüssigkeit, wenn seine Dichte gleich der Dichte der Flüssigkeit ist.

Ist die Auftriebskraft größer als die Gewichtskraft eines Körpers, bewegt er sich nach oben, d. h. ein untergetauchter Körper schwimmt auf.

$$F_G < F_A \Rightarrow \rho_K < \rho_{Fl} \quad (4-13)$$

(Entsprechendes gilt auch für Gase; in früheren Zeiten hielt man es für unmöglich, daß Maschinen, die schwerer sind als Luft, d. h. eine höhere Dichte haben, fliegen können.)

Eisberge und Bleiklötze

Beim schwimmenden Körper bleibt noch zu untersuchen, wie tief er in die Flüssigkeit eintaucht bzw. welcher Teil seines Volumens aus der Flüssigkeit herausragt. Der Körper verdrängt dabei weniger Flüssigkeit, als wenn er ganz eingetaucht ist.

Damit ist nach dem Archimedischem Prinzip auch sein Auftrieb geringer: es wirkt die gegenüber F_A verminderte Auftriebskraft F_A'

$$F_A' = V_{Tauch} \cdot \rho_{Fl} \cdot g, \quad (4-14)$$

wobei V_{Tauch} das eingetauchte Volumen des Körpers (und damit auch das Volumen der verdrängten Flüssigkeit) ist.

Da der Körper sich in Ruhe befindet (er steigt weder höher noch sinkt er tiefer ein), muß die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte Null sein. Das bedeutet, daß seine Gewichtskraft F_G gleich der Auftriebskraft F_A' ist:

$$\begin{aligned} F_G = F_A' &\Rightarrow m \cdot g = V_{\text{Tauch}} \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot g \\ &\Rightarrow V_K \cdot \rho_K \cdot g = V_{\text{Tauch}} \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot g. \end{aligned} \quad (4-15)$$

Das heißt

$$V_K \rho_K = V_{\text{Tauch}} \rho_{\text{Fl}} \quad (4-16)$$

und das Verhältnis des untergetauchten Volumens V_{Tauch} zum Gesamtvolumen V_K des Körpers ist

$$\frac{V_{\text{Tauch}}}{V_K} = \frac{\rho_K}{\rho_{\text{Fl}}} \quad \text{oder} \quad (4-17)$$

$$V_{\text{Tauch}} \cdot \rho_{\text{Fl}} = V_K \cdot \rho_K \quad (4-18)$$

Beispiel 1: Welcher Teil des Volumens eines treibenden Eisberges ragt über die Meeresoberfläche empor? Die Dichte des Eises beträgt 900 kg/m^3 , die des Meerwassers 1020 kg/m^3 . Damit ist

$$V_{\text{Tauch}} = V_K \cdot (900 \text{ kg/m}^3 / 1020 \text{ kg/m}^3) = 0,88 V_K.$$

Das bedeutet, daß sich 88 % des Gesamtvolumens unter Wasser befinden und 12 % über die Oberfläche hinausragen. Dies trifft nicht immer zu, die Dichte des Eises liegt bei arktischen Eisbergen zwischen 860 und 900 kg/m^3 .) Auch läßt sich wegen der unterschiedlichen Form der Eisberge aus dem Ergebnis nicht auf das Verhältnis der Höhe des herausragenden Teils zur Eintauchtiefe schließen.

Beispiel 2: Wenn Sie die Aufgabe (mit Süßwasser, 1000 kg/m^3) für ein Stück Kork lösen (Dichte 200 kg/m^3), werden Sie sehen, daß 80 % des Korks aus dem Wasser herausragen. Bei einigen Kunststoffen, wie z. B. aufgeschäumtem Polystyrol (Styropor®), sind es sogar ca. 98 %.

Beispiel 3: Welcher Teil des Volumens eines in Quecksilber schwimmenden Bleiquaders ragt aus der Flüssigkeit heraus? Die Dichte des Bleis beträgt $11,5 \text{ g/cm}^3$, die des Quecksilbers $13,6 \text{ g/cm}^3$. Analog zum ersten Beispiel ergibt sich

$$V_{\text{Tauch}} = V_K \cdot (11,5 \text{ g/cm}^3 / 13,6 \text{ g/cm}^3) = 0,846 V_K.$$

Es ragen also ca. 15 % des Volumens aus dem Quecksilber heraus.

Beispiel 4: Welche Dichte hat ein 12 cm hoher Holzquader, der beim Schwimmen 7,5 cm tief in Wasser eintaucht?

$$\rho_H = \rho_W \cdot \frac{A \cdot h_{\text{Tauch}}}{A \cdot h} = \rho_W \cdot \frac{h_{\text{Tauch}}}{h} = 1,0 \text{ g/cm}^3 \cdot \frac{7,5}{12} = 0,625 \text{ g/cm}^3$$

Beispiel 5: Ein Landesteg ($m = 2400 \text{ kg}$) hat eine Länge $l = 6 \text{ m}$ und eine Breite $b = 3 \text{ m}$. Die Länge des Schwimmkörpers, einer am Ende angebrachten zylinderförmigen Tonne, beträgt $l_T = 4 \text{ m}$, seine Masse m_T 200 kg. Die Tonne taucht je nach Belastung des Steges verschieden tief in das Wasser ein.



Welchen Durchmesser d muß die Tonne haben, damit sie bei der höchstzulässigen Verkehrslast $Load_{\text{max}} = 500 \text{ kg/m}^2$ gerade ganz eintaucht? Die letztgenannte Bedingung ist mit

$$F_A = F^*$$

gegeben, wobei F^* die Gewichtskraft der Tonne bei maximaler Belastung ist. Der Auftrieb F_A läßt sich durch das Volumen der Tonne $V_T = A \cdot l_T$ und der Masse m_W des verdrängten Wassers (Dichte ρ_W) ausdrücken, so daß:

$$F_A = \rho_W \cdot V_T \cdot g = \rho_W \cdot (\pi d^2/4) \cdot l_T \cdot g.$$

Die Gewichtskraft F^* , mit der die Tonne bei maximaler Belastung eingetaucht wird, setzt sich zusammen aus der Masse m_T der Tonne selbst und der Hälfte des Gewichts des maximal belasteten Steges (die andere Hälfte lastet auf dem Auflager an Land):

$$F^* = m_T \cdot g + \frac{1}{2} (m_{St} + m_L) \cdot g$$

Damit wird $F_A = F^*$ zu

$$(\pi d^2 / 4) \cdot l_T \cdot \rho_W \cdot g = [m_T + \frac{1}{2} (m_{St} + m_L)] \cdot g.$$

Die auf dem Steg lastende maximale Masse m_L ist gegeben durch die Fläche $b \cdot l$ des Steges und die Höchstlast pro Quadratmeter:

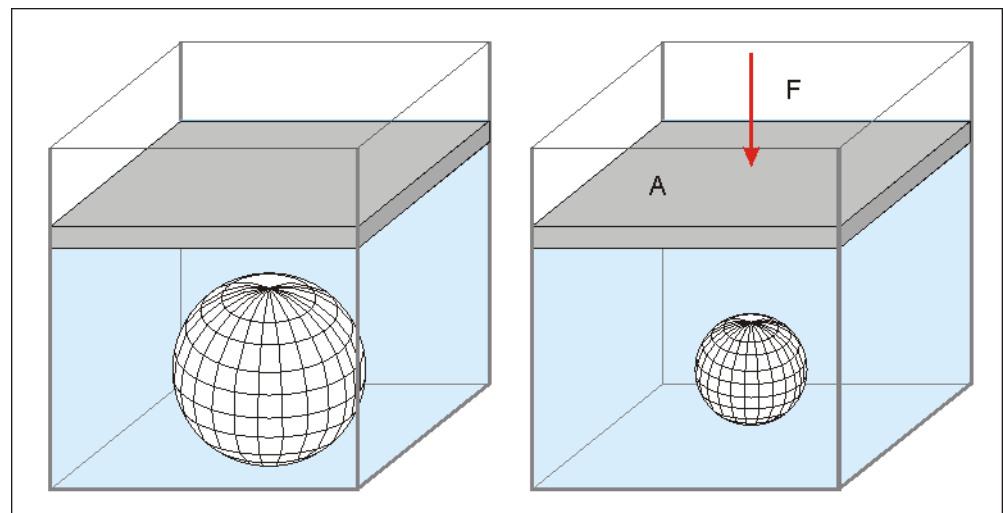
$$m_L = b \cdot l \cdot Last_{max} = 3 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 500 \text{ kg/m}^2 = 9000 \text{ kg}.$$

Damit ergibt sich für d :

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{4 \cdot [m_T + \frac{1}{2} (m_{St} + m_L)]}{\pi \cdot l_T \cdot \rho_W}} = \sqrt{\frac{4 \cdot [200 \text{ kg} + \frac{1}{2} (2400 + 9000) \text{ kg}] \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{\pi \cdot 4 \text{ m} \cdot 1 \text{ kg}/10^{-3} \text{ m}^3}} \\ &= \sqrt{\frac{(200 + 5700) \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{\text{m} \cdot \pi \cdot \text{kg}}} = \sqrt{\frac{5900 \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2}{\pi \cdot \text{kg}}} = \sqrt{\frac{5,9}{\pi}} \text{ m}^2 = 1,37 \text{ m} \end{aligned}$$

4 Kraftübertragung in Flüssigkeiten

Flüssigkeiten lassen sich nicht zusammendrücken, sie sind *inkompressibel*. Übt man mittels eines Kolbens eine Kraft auf eine abgeschlossene Flüssigkeit aus, so bleibt ihr Volumen gleich, der Druck in ihr steigt jedoch: eine darin befindliche Luftblase (z. B. in einem Ballon) verringert ihr Volumen.



Egal, an welcher Stelle sich der Ballon bzw. die Luftblase in der Flüssigkeit befindet: die Kompression findet überall in gleichem Maße statt. Der Druck wirkt also innerhalb der Flüssigkeit in alle Richtungen gleichermaßen und hat überall dieselbe Größe².

In einer abgeschlossenen Flüssigkeitsmenge herrscht an jeder Stelle der gleiche Druck.

Man kann das auch so formulieren: Der Druck übt von allen Seiten gleichmäßig eine Kraft auf die Oberfläche der Luftblase aus und drückt sie dabei zusammen³. Der Druck überträgt also die vom Kolben ausgeübte Kraft.

Die Inkompressibilität der Flüssigkeiten und die damit verbundene gleichmäßige Ausbreitung des Drucks in einem abgeschlossenen Flüssigkeitsvolumen ermöglicht die *hydraulische* Kraftübertragung. Anwendungen sind die z. B. die hydraulische Bremse, die hydraulische Hebebühne und die hydraulische Presse.

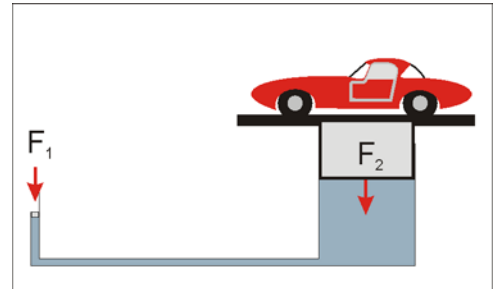


Abbildung 4-7: Hydraulische Autohebebühne.

Da überall im Hydrauliköl der gleiche Druck ($p_1 = p_2$) herrscht, gilt

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Leftrightarrow F_1 = F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} .$$

Hat der große Kolben eine Fläche von 1 m^2 und der kleine eine Fläche von 100 cm^2 , so ist das Verhältnis der Flächen zueinander $0,01$. Man kann also ein 10000 N schweres Auto mit einem Kraftaufwand von 100 N anheben oder bei einer hydraulischen Presse mit einer Kraft von 100 N eine Druckkraft von 10000 N ausüben. Bei der hydraulischen Bremse macht man sich dies zunutze, um mit geringem Pedaldruck eine starke Kraft auf die Brems Scheiben wirken zu lassen.

² Beachte: die Kraft ist eine vektorielle Größe, der Druck aber ein Skalar. (In der Hydrostatik genügt es, nur den Betrag der Kraft zu berücksichtigen, deshalb wird hier auf die Vektorschreibweise verzichtet.)

³ Der Druck wirkt natürlich auch auf die Gefäßwände und alle anderen Körper in der Flüssigkeit. Die von ihm ausgeübten bzw. übertragenen Kräfte stehen an jeder Stelle senkrecht auf den Oberflächen.