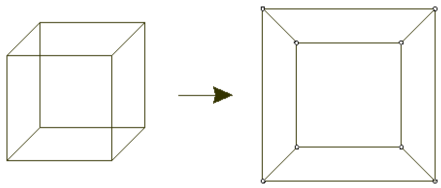
Die Eulersche Polyederformel

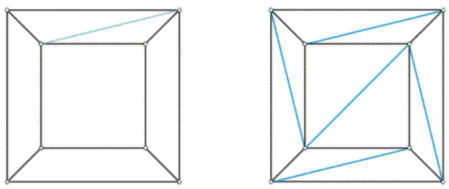
In einem einfachen Polyeder, also einem Körper, dessen Oberfläche aus einer Anzahl polygonaler Flächen besteht und sich stetig in eine Kugelfläche deformieren läßt, gilt für die Anzahl der Flächen F, der Kanten K und der Ecken E die Formel

$$E - K + F = 2\ .$$

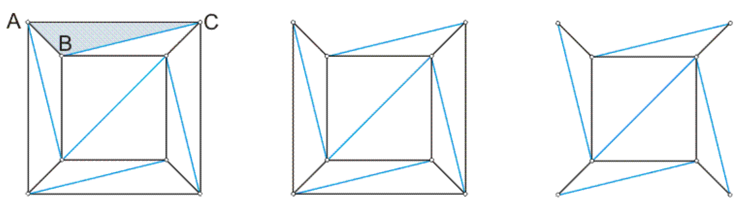
Wir wählen ein beliebiges Polyeder, in diesem Fall einen Würfel, und nehmen an, er sei hohl (das können wir tun, denn dies hat ja keinen Einfluß auf die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten). Weiterhin nehmen wir an, seine Oberfläche sei ähnlich einer Gummimembran beliebig verformbar. Wir schneiden wir eine der Flächen heraus und ziehen die verbliebenen Flächen zu einer Ebene auseinander.



Wir zeichnen in eine der Flächen eine Diagonale ein, d. h. wir erhöhen die Anzahl der Kanten um eins. Dabei erhöht sich auch die Anzahl der Flächen um eins, also ändert sich der Wert von $E - K + F$ nicht.
Ebenso verfährt man mit den restlichen Flächen; jedes Mal werden eine Kante und eine Fläche hinzugefügt, d. h. $E - K + F$ bleibt unverändert.

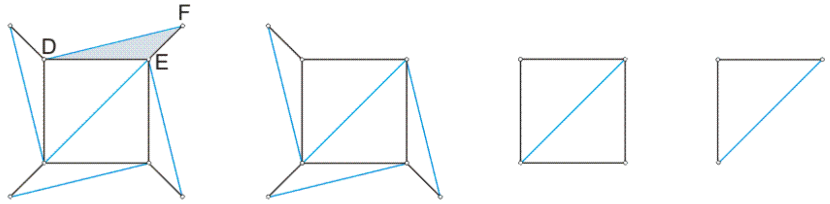


Im nächsten Schritt entfernen wir eines der am Rand liegenden Dreiecke des Typs ABC. Die Folge ist, daß sich sowohl die Anzahl der Kanten als auch die der Flächen um eins vermindert. Wieder ist $E - K + F$ gleich geblieben.
Mit den restlichen randständigen Dreiecken des Typs ABC verfahren wie ebenso, $E - K + F$ ändert sich auch weiterhin nicht.



Wird eines der nun am Rand liegenden Dreiecke vom Typ DEF entfernt, vermindert dies nicht nur die Anzahl der Flächen, sondern auch die der Ecken um eins, die Anzahl der Kanten wird um zwei vermindert. Das bedeutet, daß $E - K + F$ auch jetzt unverändert bleibt.
Dies ändert sich nicht, bis ein aus zwei Dreiecken bestehendes Gebilde übrigbleibt.

Auch die Entnahme eines der beiden letzten Dreiecke vermindert die Anzahl der Flächen und Ecken um je eins, die der Kanten um zwei. Das bedeutet: von Anfang an bis zu letztendlich verbliebenen Dreieck hat $E - K + F$ seine Wert nicht geändert.



Nun ist aber für das letzte Dreieck $E - K + F = 3 - 3 + 1 = 1$, also *muß* auch in dem ersten, ursprünglichen Netz $E - K + F = 1$ gegolten haben. Dieses Netz aber ist zugleich das Polyeder mit der herausgeschnittenen Fläche, so daß für das vollständige Polyeder $E - K + F = 2$ gilt. Damit ist der Beweis für die Eulersche Polyederformel erbracht.

Fünf platonische Körper

Mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel läßt sich beweisen, daß es nur fünf regelmäßige Polyeder, die *Platonischen Körper*, gibt.

Ein reguläres Polyeder habe F Flächen, deren jede ein reguläres n-Eck ist, ferner treffen an jeder Ecke r Kanten aufeinander.
Das heißt erstens: zu jeder Fläche gehören n Kanten. Unzutreffend ist aber die Annahme, daß die Anzahl K der Kanten n-mal die der Flächen ist ($K = nF$); vielmehr gehört jede Kante zu *zwei* Flächen, so daß gilt:

$$2K = nF\ .$$

Das heißt zweitens: zu jeder Ecke gehören r Kanten. Unzutreffend ist auch hier die Annahme, daß die Anzahl der Kanten r-mal die Anzahl der Ecken ist ($K = rE$); vielmehr gehört jede Kante zu *zwei* Ecken (unabhängig davon, wie viele Kante an dieser Ecke zusammentreffen), man erhält also

$$2K = rE\ .$$

Einsetzen in die Polyederformel liefert

$$\frac{2K}{r} + \frac{2K}{n} - K = 2$$

oder

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}\,.$$

Ein Polygon muß mindestens drei Seiten haben, also gilt $n \geq 3$; da an jeder Ecke nicht weniger als drei Kanten zusammentreffen können, gilt $r \geq 3$. Andererseits muß $1/r + 1/n$ größer als ½ sein (wegen des positiven Wertes von K). Das heißt: r und n können nicht beide größer als drei sein.

1. Fall: Welche Werte kann r haben, wenn $n = 3$ ist?

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{1}{r}-\frac{1}{6}=\frac{1}{K}.$$

r kann nicht größer als 6 sein, da sonst $1/K$ negativ würde; es bleiben also nur $r = 3$, $r = 4$, $r = 5$ übrig. Damit erhält man $K = 6$, $K = 12$ und $K = 30$. Nach $rE = 2K$ erhält man die Anzahl der Ecken zu $E = 2K/r$ und nach der Polyederformel $F = 2 – E + K$.

Die Möglichkeiten:

$K = 6$, $r = 3$; $E = 12/3 = 4 \Rightarrow$ F = 2 – 4 + 6 = 4; ein Tetraeder
$K = 12$, $r = 4$; $E = 24/4 = 6 \Rightarrow$ F = 2 – 6 + 12 = 8; ein Oktaeder
$K = 30$, $r = 5$; $E = 60/5 = 12 \Rightarrow$ F = 2 – 12 + 30 = 20; ein Ikosaeder

2. Fall: Welche Werte kann *n* haben, wenn $r = 3$ ist?

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{K} \Leftrightarrow \frac{1}{n}-\frac{1}{6}=\frac{1}{K}.$$

n kann nicht größer als 6 sein, so daß $n = 3$, $n = 4$ oder $n = 5$ gilt. Dem entsprechen $K = 6$, $K = 12$, $K = 30$. Mit $F = 2K/n$

$K = 6$, $n = 3$; $F = 12/3 = 4$; ein Tetraeder
$K = 12$, n = 4; $F = 24/4 = 6$; ein Hexaeder
$K = 30$, n = 5; $F = 60/5 = 12$; ein Dodekaeder

Damit sind alle sich aus der Eulerschen Polyederformel ergebenden Möglichkeiten ausgeschöpft, mehr reguläre Polyeder gibt es nicht.

Quellen:
Courant R, Robbins H: Mathematik. ISBN 3-540-55743-1
Devlin K: Muster der Mathematik. ISBN 3-86025-358-1