

1.1 Räume, Dimensionen und Koordinaten

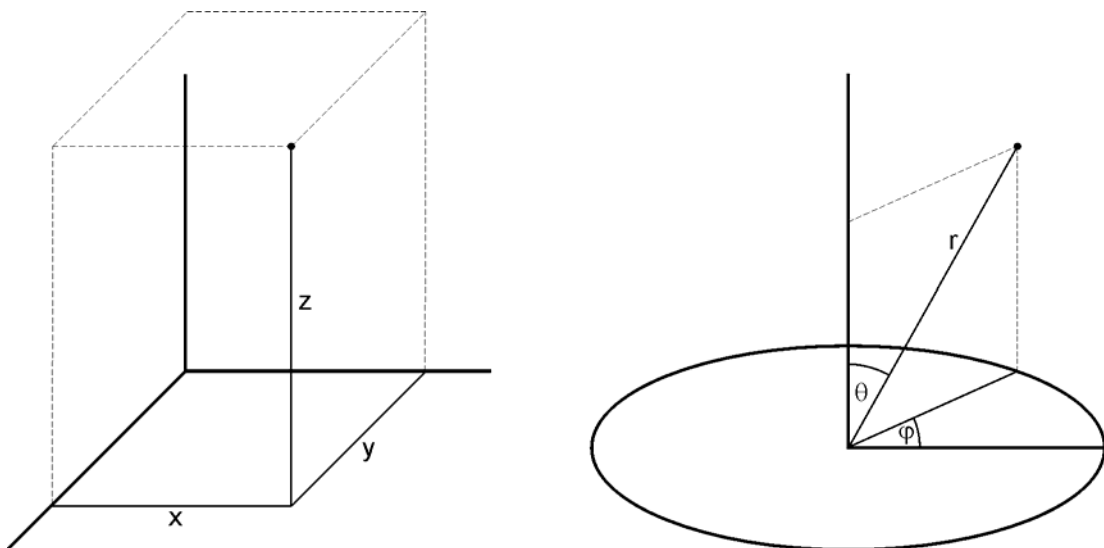
Was der Raum ist, wird wohl intuitiv so beantwortet werden: Der Raum ist das, was uns ständig umgibt, wir können uns in ihm bewegen, vorwärts, rückwärts, nach links, nach rechts, nach oben und nach unten. Natürlich auch diagonal, aber eine solche Bewegung wäre nicht unabhängig, sie wäre aus zwei oder drei anderen zusammengesetzt; man würde z. B. nach „nach links hinten“ sagen.

Das Bestehen von drei unabhängigen, senkrecht aufeinander stehenden Richtungen ist eine der grundlegenden Eigenschaften des physikalischen Raumes; wir sagen, daß der Raum *dreidimensional* ist. Das heißt mit anderen Worten: jeder Punkt im Raum kann durch Bezugnahme auf diese drei Richtungen angegeben werden. Wenn wir uns in einer fremden Stadt beim Hotelportier nach dem Weg zu einer Firma erkundigen, wird man uns z. B. antworten: „Gehen Sie 400 Meter geradeaus, dann bis zur zweiten Kreuzung nach links. Im achten Stock finden Sie die Büros“. Man nennt diese drei zur eindeutigen Ortsbestimmung nötigen Angaben *Koordinaten*.

Natürlich gelten diese Angaben nur an der Stelle, an der wir sie erhalten haben. Dieser *Ursprungspunkt* ist unsere Hotelrezeption; woanders in der Stadt, d. h. von einem anderen Ursprungspunkt aus, würde man andere Angaben erhalten, die aber ebenfalls zum Ziel führen.

Zusammen mit dem Ursprungspunkt (kurz *Ursprung*) bilden die Koordinaten ein *Koordinatensystem*. Man kann die unterschiedlichen Angaben problemlos ineinander umrechnen, wenn wir die Lage des zweiten Koordinatensystems in Bezug auf das Hotel kennen. Eine solche Berechnung nennt man *Koordinatentransformation*.

Es ist nicht immer sinnvoll, ein Koordinatensystem mit senkrecht aufeinander stehenden Achsen¹ zu verwenden. Dies funktioniert zwar gut bei Ortsangaben in New York, wo sich durch die Streets und Avenues ein solches System geradezu aufdrängt. Moskau hingegen mit seinen radial verlaufenden Straßen und konzentrischen Boulevards wäre besser mit einem System aus *Polarkoordinaten* bedient: man würde z. B. sagen, ein Gebäude sei zwanzig Blocks in nordnordöstlicher Richtung von der Kremlmauer entfernt.



Ein rechtwinkliges Koordinatensystem und ein Polarkoordinatensystem

Welche Art von Koordinatensystem auch immer wir wählen: es sind stets *drei* Angaben nötig, um einen Punkt im dreidimensionalen Raum zu beschreiben.

In der Relativitätstheorie bekommt man es mit vierdimensionalen Gebilden zu tun, in anderen Gebieten

¹ Man nennt dies ein *rechtwinkliges* oder *kartesisches* Koordinatensystem (nach René Descartes, latinisiert Cartesius). Darüber hinaus gibt es noch Systeme, bei denen die Koordinaten nicht senkrecht aufeinander stehen und sogar solche, deren Achsen nicht geradlinig, sondern krumm sind.

der modernen Physik ist sogar von zehn oder mehr Dimensionen die Rede. Sich ein Bild von einem Raum mit mehr als drei Dimensionen zu machen, übersteigt unser Vorstellungsvermögen, dennoch kann man auf mathematischem Wege einiges über die Eigenschaften solcher Räume erfahren, wie wir noch sehen werden.

Leichter fällt es schon, sich Räume mit weniger als drei Dimensionen zu veranschaulichen. Eine Ebene oder eine Kugeloberfläche sind Beispiele für einen zweidimensionalen Raum, denn um die Lage eines Punktes auf einer Fläche anzugeben, genügen zwei Zahlen. Gerade oder gekrümmte Linien sind eindimensionale Räume, da zur Beschreibung der Lage eines Punktes auf einer Linie nur eine Koordinatenangabe erforderlich ist. Wir können sogar behaupten, daß ein Punkt ein „nulldimensionaler“ Raum ist, denn innerhalb eines Punktes gibt es keinen Orte, dessen Lage man beschreiben kann.

Aus mathematischer Sicht kann man sagen, daß "Raum" gleichbedeutend mit "Koordinatensystem" ist, unabhängig von der Anzahl der benötigten Koordinaten.

Geometrische Eigenschaften von Linien und Flächen, auf die wir gewissermaßen aus einer höheren Dimension „von außen herabschauen“, sind unserer Anschauung leichter zugänglich als entsprechende Eigenschaften des dreidimensionalen Raums, innerhalb dessen wir uns selbst befinden. Uns beispielsweise eine gekrümmte Fläche vorzustellen, bereitet keine Probleme, wenn aber von einem gekrümmten Raum die Rede ist, müssen wir passen.

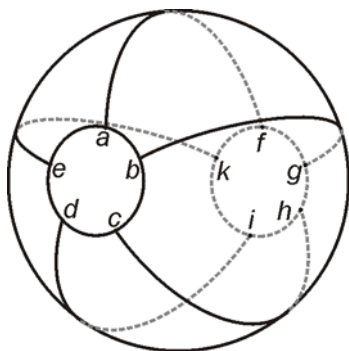
1.2 Topologie

1.2.1 Der Unterschied zwischen Geometrie und Topologie

Mit den Eigenschaften des Raumes kommt man gewöhnlich in der ebenen Geometrie in Berührung, dort geht es meist um Entfernungen und Winkel. Es werden Polygone konstruiert, Kreise in und um Polygone gezeichnet, Streckenverhältnisse untersucht usw. Es gibt aber auch Eigenschaften des Raumes, die sich völlig ohne die Darstellung von Entfernungen oder Winkeln beschreiben lassen. Das Teilgebiet der Mathematik, das von diesen Dingen handelt, heißt *Topologie*. Beginnen wir den Exkurs in dieses Gebiet mit einem einfachen Beispiel, einer *geschlossenen Oberfläche*.

Das einfachste Beispiel für eine geschlossenen Oberfläche ist eine Kugel. Jede andere geschlossene Oberfläche kann man sich vorstellen als Resultat der Verformung eines Gummiballons (der dabei allerdings nirgends zerschnitten werden darf).

Wir zeichnen auf einer Kugel einige Punkte ein und verbinden diese durch Linien miteinander, die sich nirgends schneiden. Wie viele Punkte es sind und wo sie liegen, spielt keine Rolle; wir wählen einfach mal eine Anordnung wie auf einem Wasserball. Die Linien stellen zugleich die Begrenzungen von Flächen dar. Nun untersuchen wir die Beziehungen zwischen der Zahl der Punkte, der Zahl der Linien und der Zahl der Flächen: 10 Punkte, 15 Linien, 7 Flächen. (Jede Linie zwischen zwei Punkten zählt mit, die beiden „Kreise“ stellen also jeweils 5 Linien dar.)



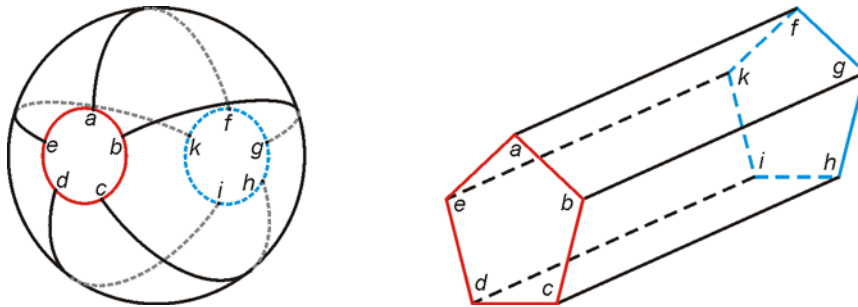
Konstruktion von Punkten, Linien und Flächen auf einer Kugel

Hätten wir statt der Kugel eine Kartoffel oder einen Zylinder (dies sind auch Beispiele für geschlossene Oberflächen) genommen und auf ihr unsere Konstruktionen ausgeführt, wäre das Ergebnis dasselbe: 10 Punkte, 15 Linien, 7 Flächen; für jede beliebige geschlossene Oberfläche erhält man dasselbe Ergebnis.

Hier zeigt sich deutlich der Unterschied zwischen herkömmlicher Geometrie und Topologie: Nimmt erstere bei jeder Verformung Volumenänderungen, veränderte Streckenverhältnisse usw. wahr, so betrachtet letztere nur Größen, die unter derartigen Verformungen unverändert bleiben.

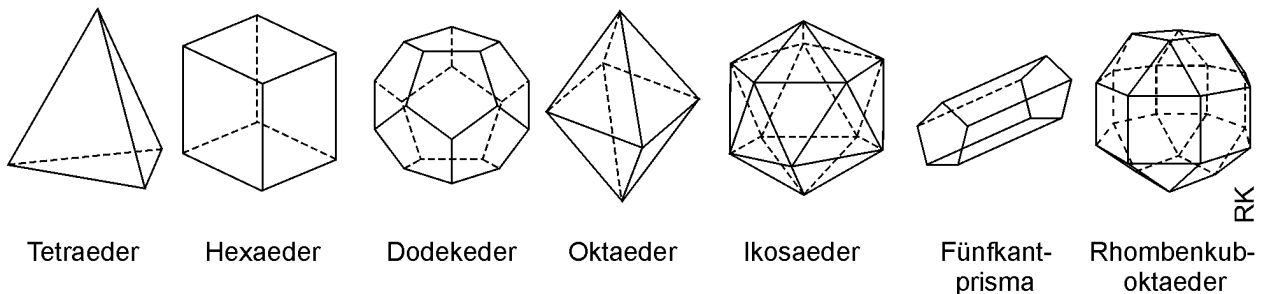
1.2.2 Die Eulersche Polyederformel

Verformen wir die mit unserer Unterteilung versehene Kugeloberfläche so, daß jede Fläche eben wird, erhalten wir ein Polyeder, ebenfalls ein Beispiel für eine geschlossene Oberfläche. Dabei werden die Punkte zu Ecken und die Linien zu Kanten, und wie schon angedeutet, haben wir 10 Ecken, 15 Kanten und 7 Flächen.



Die Kugel wird zu einem Fünfkantprisma verformt

Dieses Polyeder soll stellvertretend für alle möglichen Polyeder sein, denn wir wollen herausfinden, wie die Beziehungen zwischen der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines *beliebigen* Polyeders sind. Betrachten wir dazu die fünf regelmäßigen Polyeder, unser aus der Kugel entstandenes Prisma und ein Rhombenkuboktaeder.



Zählen wir die Ecken, Kanten und Flächen und tragen sie in eine Tabelle ein:

	Ecken E	Kanten K	Flächen F	E+F	K+2
Tetraeder	4	6	4	8	8
Hexaeder	8	12	6	14	14
Oktaeder	6	12	8	14	14
Dodekaeder	20	30	12	32	32
Ikosaeder	12	30	20	32	32
Prisma	10	15	7	17	17
Rhombenkuboktaeder	24	48	26	50	50

Es zeigt sich, daß die in der Spalte E + F eingetragene Summe der Ecken und Flächen immer um 2 größer ist als die Anzahl der Kanten (Spalte K + 2). Wir können somit notieren:

$$E + F = K + 2$$

oder

$$E - K + F = 2$$

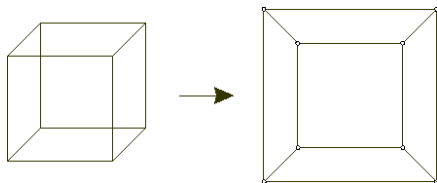
Diese *Eulersche Polyederformel* ist ein allgemeiner topologischer Lehrsatz und gilt für alle Körper mit geschlossenen Oberflächen. Er hängt weder von der Länge der Kanten, der Form der Flächen oder den durch sie gebildeten Winkeln ab.

Der Beweis der Eulerschen Polyederformel

Satz: In einem einfachen Polyeder, also einem Körper, dessen Oberfläche aus einer Anzahl polygonaler Flächen besteht und sich stetig in eine Kugelfläche deformieren läßt, gilt für die Anzahl der Flächen F , der Kanten K und der Ecken E die Formel

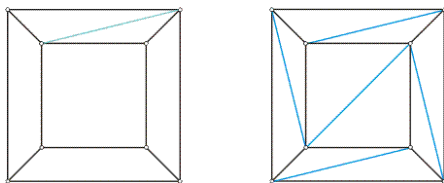
$$E - K + F = 2 .$$

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Polyeder, in diesem Fall einen Würfel, und nehmen an, er sei hohl (das können wir tun, denn dies hat ja keinen Einfluß auf die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten). Weiterhin nehmen wir an, seine Oberfläche sei ähnlich einer Gummimembran beliebig verformbar. Wir schneiden wir eine der Flächen heraus und ziehen die verbliebenen Flächen zu einer Ebene auseinander.



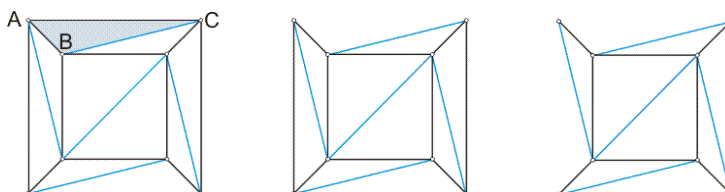
Wir zeichnen in eine der Flächen eine Diagonale ein, d. h. wir erhöhen die Anzahl der Kanten um eins. Dabei erhöht sich auch die Anzahl der Flächen um eins, also ändert sich der Wert von $E - K + F$ nicht.

Ebenso verfährt man mit den restlichen Flächen; jedes Mal werden eine Kante und eine Fläche hinzugefügt, d. h. $E - K + F$ bleibt unverändert.



Im nächsten Schritt entfernen wir eines der am Rand liegenden Dreiecke des Typs ABC . Die Folge ist, daß sich sowohl die Anzahl der Kanten als auch die der Flächen um eins vermindert. Wieder ist $E - K + F$ gleich geblieben.

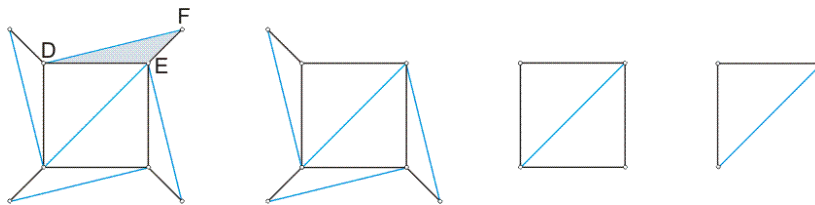
Mit den restlichen randständigen Dreiecken des Typs ABC verfahren wie ebenso, $E - K + F$ ändert sich auch weiterhin nicht.



Wird eines der nun am Rand liegenden Dreiecke vom Typ DEF entfernt, vermindert dies nicht nur die Anzahl der Flächen, sondern auch die der Ecken um eins, die Anzahl der Kanten wird um zwei vermindert. Das bedeutet, daß $E - K + F$ auch jetzt unverändert bleibt.

Dies ändert sich nicht, bis ein aus zwei Dreiecken bestehendes Gebilde übrigbleibt.

Auch die Entnahme eines der beiden letzten Dreiecke vermindert die Anzahl der Flächen und Ecken um je eins, die der Kanten um zwei. Das bedeutet: von Anfang an bis zu letztendlich verbliebenen Dreieck hat $E - K + F$ seine Wert nicht geändert.



Nun ist aber für das letzte Dreieck $E - K + F = 3 - 3 + 1 = 1$, also *muß* auch in dem ersten, ursprünglichen Netz $E - K + F = 1$ gegolten haben. Dieses Netz aber ist zugleich das Polyeder mit der herausgeschnittenen Fläche, so daß für das vollständige Polyeder stets $E - K + F = 2$ gilt. Damit ist der Beweis für die Eulersche Polyederformel erbracht. (Mit Hilfe von Eulers Formel läßt sich übrigens auch beweisen, daß es nur fünf regelmäßige Polyeder geben kann: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.)

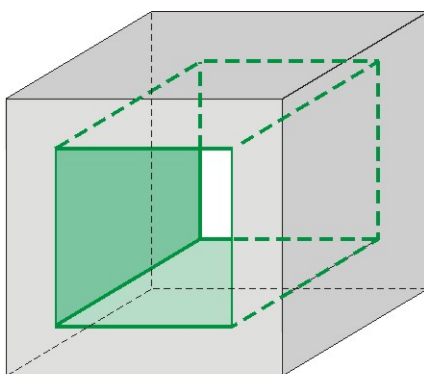
1.2.3 Euler gilt für manche Körper nicht

Beim Beweis des Eulerschen Theorems haben wir eine stillschweigende Voraussetzung gemacht: wir haben uns auf Körper beschränkt, die in gewissem Sinne keine „Löcher“ haben. Dabei verstehen wir unter einem Loch nicht so etwas wie das Loch in der Hülle eines Luftballons, sondern so etwas wie die Öffnung eines Donuts oder eines Schwimmreifens (dessen Form der Mathematiker als *Torus* bezeichnet). Durch Strecken und Stauchen läßt sich ein Ballon z. B. in eine Pyramide oder einen Würfel verformen, nicht aber in einen Torus. Der Mathematiker spricht auch vom *topologischen Geschlecht* der Körper; ein „normales“ Polyeder hat das Geschlecht 0, ein Donut das Geschlecht 1 und eine Brezel das Geschlecht 3. Nur Körper desselben Geschlechts sind (mit den genannten „erlaubten“ Operationen) ineinander umwandelbar.²



Körper unterschiedlichen topologischen Geschlechts

Die Verformung eines Donuts in einen Körper gleichen topologischen Geschlechts könnte so aussehen:



Ein zum Polyeder verformter Donut

Dies ist ohne Zweifel auch ein Polyeder. Gilt der Eulersche Satz auch hier? Einfaches Abzählen ergibt 16 Ecken, 32 Kanten und 16 Flächen; somit ist $E + F = 32$, während $K + 2 = 34$ ist. Es ist also keineswegs $E + F = K + 2$. Warum ist das so, warum gilt „der Euler“ hier nicht? Der Grund liegt einfach darin, daß sich nicht alle notwendigen (mathematischen) Operationen ausführen lassen. Beim Polyeder (genauer:

² http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Mug_and_Torus_morph.gif&filetimestamp=20070302005604

Hohlpolyeder) des topologischen Geschlechts 0 ist es möglich, nach dem Herausschneiden einer Fläche die verbleibende Fläche so zu verformen, daß sie zu einer Ebene wird. Bei einem Torus ist dies hingegen nicht möglich, was auch immer man ausprobiert.³

Zum Schluß sein noch ein mit dem Eulerschen Satz zusammenhängendes Problem der Topologie erwähnt, das sogenannte Vierfarbenproblem.

Es sei eine in Abschnitte unterteilte Kugeloberfläche sei so zu färben, daß zwei benachbarte Abschnitte niemals die gleiche Farbe haben. (Man stelle sich die verschiedenfarbigen Länder auf einem Globus vor.) Was ist die minimale Anzahl an Farben? Zwei Farben sind offensichtlich nicht ausreichend, denn wo drei Grenzen zusammentreffen, benötigt man schon drei verschiedene Farben. Man findet beim Betrachten einer Landkarte leicht die Fälle, in denen vier Farben notwendig sind; nie jedoch wird man ein Beispiel finden, in dem mehr als vier Farben benötigt werden. Dieser *Vierfarbensatz* ließ sich anderthalb Jahrhunderte nicht beweisen, erst 1996 gelang ein computergestützter Beweis. Zuvor konnte lediglich bewiesen werden, daß fünf Farben genügen müssen. Die Grundlage des Beweises beruhte auf der Anwendung des Eulerschen Satzes auf die Zahl der Länder, der Grenzen und der drei- und mehrfachen Punkte, an denen sich die Grenzen mehrerer Länder treffen. Kurioserweise gelangen entsprechende Beweise für kompliziertere Oberflächen schon lange vorher, z. B. der Siebenfarbensatz: sieben Farben genügen, um jede mögliche Kombination von Teilabschnitten auf einen Torus so anzufärben, daß niemals zwei benachbarte Abschnitte die gleiche Farbe bekommen.

1.3 Inside Out oder Topologie in drei Dimensionen

1.3.1 Ein gekrümmter Raum?

Im letzten Abschnitt ging es um die topologischen Eigenschaften verschiedener Oberflächen, also zweidimensionaler Räume. Wie sieht es aus, wenn man entsprechende Überlegungen hinsichtlich des dreidimensionalen Raumes anstellt? Was wäre z. B. die dreidimensionale Analogie des Vierfarbenproblems, das wir von der Oberfläche einer Kugel oder eines Torus kennen? Kann man sich besondere dreidimensionale Räume denken, die sich zum gewöhnlichen Raum so verhalten wie die Kugel- oder Torusoberflächen zu einer ebenen Fläche, also sozusagen einen „gekrümmten“ Raum?

Aus unserer alltäglichen Anschauung heraus sind wir geneigt, nur einen einzigen Typ des dreidimensionalen Raumes für möglich zu halten, nämlich den uns umgebenden physikalischen Raum der euklidischen Geometrie, quasi einen „ebenen“ oder „flachen“ Raum.

Um uns der Vorstellung eines zur Oberfläche einer Kugel analogen dreidimensionalen Raumes anzunähern, betrachten wir einige Eigenschaften einer sphärischen Oberfläche. Sie ist zwar unbegrenzt, aber doch endlich, damit hat sie einen bestimmten Flächeninhalt. Man kann sich auf ihr bewegen, ohne jemals an Grenzen zu stoßen, die Fläche ist in sich geschlossen. Ist ein dreidimensionaler Raum denkbar, der in sich geschlossen wäre, also ein endliches Volumen ohne irgendwelche Grenzen hätte?

1.3.2 Wurmstichige Äpfel und InsideOut

Zu diesem Thema folgt eine Stelle aus George Gamows Buch *One two three... infinity*, die ich – nicht zuletzt der Originalität des Gedankengangs und Gamows Stils wegen – unübersetzt lasse. Der Text stammt übrigens aus dem Jahr 1947.

“Think about two spherical bodies each limited by spherical surfaces, as the body of an apple is limited by its skin.

Imagine now that these two spherical bodies are put ‘through one another’ and joined along the outer surface. Of course we do not try to tell you that one can take two physical bodies, such as our two apples and squeeze them through each other so that their skins can be glued together. The apples would be squashed but would never penetrate each other.

One must rather think about an apple with an intricate system of channels eaten through it by worms. There must be *two* breeds of worm, say white and black ones, who do not like each other and never join

³ Natürlich gibt es auch hier eine gesetzmäßige Beziehung zwischen E, K und F. Für die donut- oder torusartigen Polyeder gilt $E + F = K$, für einen Polyeder des topologischen Geschlechts 2 gilt $E + F = K - 2$. Allgemeinen gilt $E + F = K + 2 - 2n$, wobei n die Zahl der Löcher ist.

their respective channels inside the apple although they may start them at adjacent points on the surface. An apple attacked by these two kinds of worm will finally look somewhat like [the] Figure, with a double network of channels, tightly intertwined and filling up the entire interior of our apple.

But, although white and black channels pass very close to each other, the only way to get from one half of the labyrinth to the other is to go first through the surfaces. If you imagine the channels becoming thinner and thinner, and their number larger and larger, you will finally envisage the space inside the apple as being formed by the overlapping of two independent spaces connected only at their common surface.



If you do not like worms, you can think of a double system of enclosed corridors and stairways that could have been built, for example, inside the giant sphere at the last World's Fair 1939 in New York. Each system of stairways can be thought of as running through the entire volume of the sphere, but to get from some point of the first system to an adjacent point of the second system, one would have to go all the way to the surface of the sphere, where the two systems join, and then all the way back again. We say that two spheres overlap without interfering with each other, and a friend of yours could be very close to you in spite of the fact that in order to see him, and to shake his hand you would have to go a long way around! It is important to notice that the joining points of the two stairway systems would not actually differ from any other point within the sphere, since it would always be possible to deform the whole structure so that the joining points would be pulled inward and the points that were previously inside would come to the surface. The second important point about our model is that in spite of the fact that the total combined length of channels is finite, there are no 'dead ends.' You could move through the corridors and stairway on and on without being stopped by any wall or fence, and if you walked far enough you would inevitably find yourself at the point from which you started. Looking at the entire structure *from outside* one can say that a person moving through the labyrinth finally would come back to the point of his departure simply because the corridors gradually turned around, but for the people who were *inside*, and could not even know that such a thing as the 'outside' existed, the space would appear as being of *finite size* and yet without any marked boundaries. As we shall see, [...] this '*self-inclosed space of three dimensions*' that has no apparent boundaries and yet is not at all infinite was found very useful in the discussion of the properties of the Universe at large."

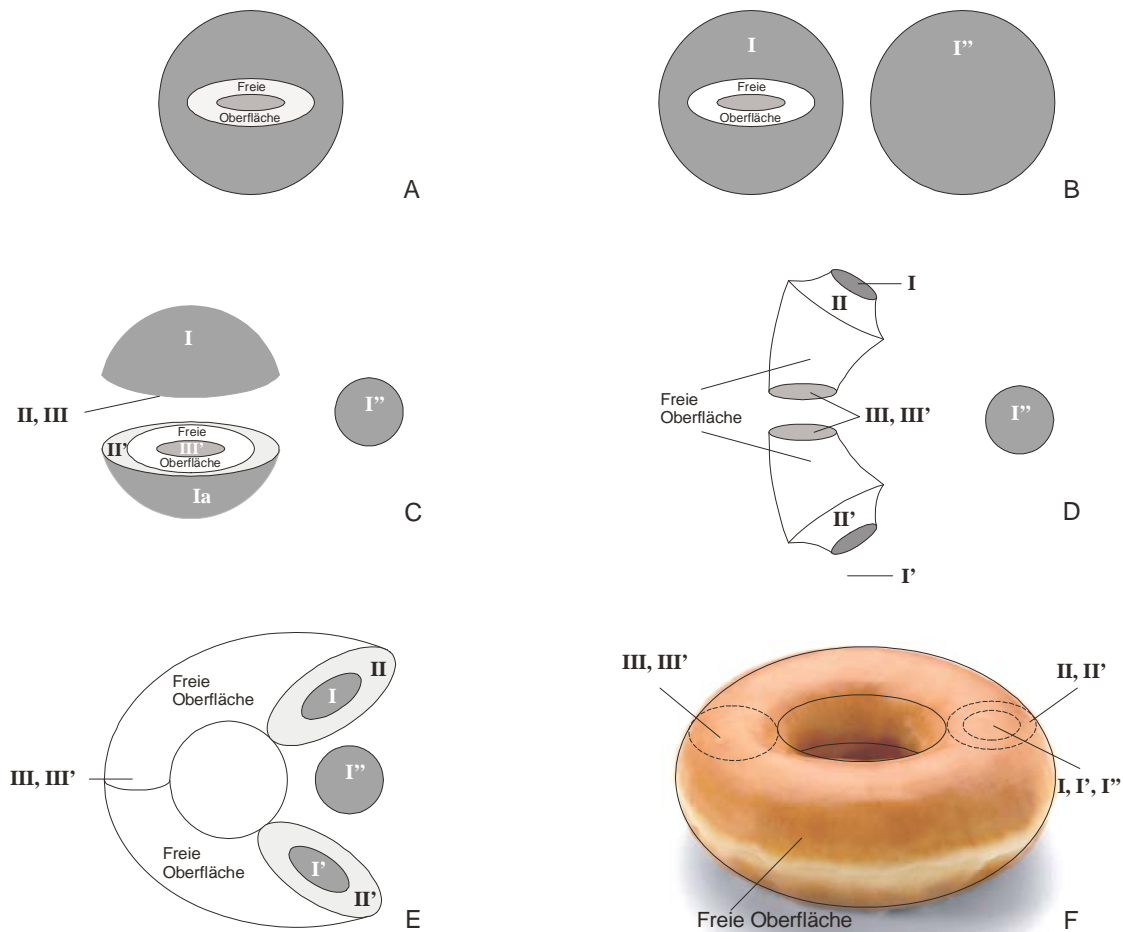


1.3.2 Verwandlung eines Apfels in einen Donut

Später fährt Gamow fort: "We are not yet quite through with the apple and the worms, and the next question we ask is whether it is possible to turn a worm-eaten apple into a doughnut [...] Let us take a double apple such as that discussed in the previous section, that is two fresh apples put 'through one another' and 'glued together' along their surfaces. Suppose a worm has eaten within one of the apples a broad circular channel as shown in Figure A. Within *one* of the apples, mind you, so that whereas outside the channel each point is a double one belonging to both apples, inside the channel we have only the material of the apple not eaten by the worm. Now our 'double apple' has a free surface composed of the inner walls of the channel.

Can you change the form of this spoiled apple so as to turn it into a doughnut? It is assumed, of course, that the material of the apple is quite plastic so that you can mold it any way you like, the only condition being that no rupture of the material must take place. To facilitate the operation, we may cut the material of the apple, provided we glue it back again after the required deformation is completed.

We start the operation by unfastening the skins of two parts forming the ‘double apple’ and taking them apart (Figure B). We shall mark the two unglued surfaces by numerals I and I’, in order to keep track of them in the following operations, so that we may glue them back in place again before we are finished. Now, cut the part containing the worm-eaten channel across so that the cut will go across the channel



(Figure C). This operation opens two newly cut surfaces which we mark by II, II' and III, III', so that we shall know exactly where to fasten them together later. It also brings out the free surfaces of the channel, which is destined to form the free surface of the doughnut. Now, take the cut parts and stretch them in the way shown in Figure d. The free surface is now stretched out to a large extent (but according to our assumption the materials used are perfectly stretchable!). At the same time the cut surfaces I, II, and III have been reduced in their dimensions. While we are operating on the first half of the ‘double apple,’ we must also reduce the size of the second half squeezing it down to the dimensions of a cherry. Now, we are ready to start gluing back along the cuts we made. First, and that is easy, join the surfaces III, III' again, thus obtaining the shape shown in Figure E. Next, put the shrunken half apple between the two ends of the pincer thus formed, and bring the ends together. The surface of the ball marked I' will be glued up to the surfaces I from which it was originally unglued, and the cut surfaces II and II' will close on each other. As a result we get a doughnut, nice and smooth.”⁴

⁴ Bei der Bezeichnung der Flächen ist Gamow ein Fehler unterlaufen, den ich entgegen den üblichen Regeln wissenschaftlichen Zitierens kommentarlos korrigiert habe.

1.4 Links und Rechts und Möbius

Ein weiteres mit den allgemeinen Eigenschaften des Raumes zusammenhängendes Thema der Topologie ist das der Händigkeit. Vergleicht man die beiden Handschuhe eines Paares, so findet man sie zwar in allen Abmessungen gleich, aber man kann den linken Handschuh nicht über die rechte Hand ziehen und umgekehrt, gleich wie man sie dreht und wendet. Keine der bekannten topologischen Operationen wäre hier von Erfolg gekrönt.⁵ Wodurch unterscheiden sich Handschuhe oder Schneckenhäuser eigentlich von Gegenständen, die eine solche Eigenschaft nicht aufweisen, z. B.



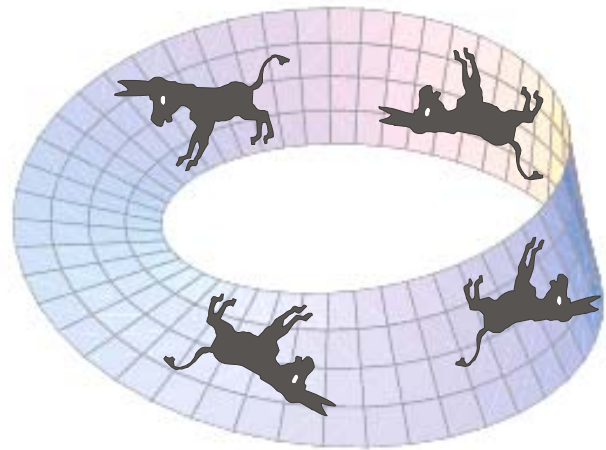
Kugeln oder Hosen? Dinge wie Hosen oder Kugeln besitzen eine *Symmetrieebene*, entlang derer man sie in zwei gleiche Hälften geteilt denken kann. Handschuhen oder Schuhen fehlt eine solche Symmetrieebene, sie können nur in einer von zwei verschiedenen Modifikationen auftreten, eben einer linken und einer rechten.

Ist es aber wirklich absolut unmöglich, ein linkes in ein rechtes Objekt zu verwandeln, und umgekehrt? Könnte man sich nicht irgendeine Art von Raum vorstellen, in dem es doch funktioniert? Um uns einer Antwort zu nähern, begeben wir uns nach Flatland. Dies ist eine Fläche, auf der zweidimensionale Wesen leben, die von einer dritten Dimension keine Ahnung haben, von der aus wir sie jedoch nicht nur beobachten, sondern auch in das Geschehen eingreifen können.⁶

In Flatland lebt ein Rechtseesel. Er heißt so, weil er immer nur nach rechts gucken kann. Wollte er nach links schauen, müßte man ihn umdrehen. Entsprechendes gilt für den Linkseesel. Beide unterscheiden sich vom Standpunkt der Bewohner Flatlands wie ein rechter und linker Handschuh in unserem 3D-Raum.

Jetzt hoffen wir, daß Bewohner Flatlands nicht allzu ängstlich sind. Wir nehmen nämlich den Linkseesel aus der Fläche heraus, drehen in um und tun ihn wieder zurück. Damit ist aus ihm ein Rechtseesel geworden. Funktioniert das mit einem Handschuh auch? Nimmt man einen rechten Handschuh aus unserem dreidimensionalen Raum heraus in eine vierte Dimension, so kann man ihn „umdrehen“ und als linken Handschuh wieder in unseren Raum zurückbringen. Nur hat die Angelegenheit einen Haken: eine vierte Dimension ist uns schlicht nicht zugänglich. Was tun?

Wir nehmen einen langen Streifen Papier, den wir einmal verdrehen und dann an den Enden zusammenkleben. Das so entstandene ringförmige Gebilde heißt *Möbiusband*⁷ und hat eine (nicht nur für Esel) überraschende Eigenschaft: läuft ein Linkseesel auf dem Möbiusband entlang und kommt er nach dem Durchlaufen des Bandes wieder an seinem Ausgangspunkt an, ist aus ihm ein Rechtseesel geworden, ohne daß man ihn zum Drehen aus der Fläche hätte herausnehmen müssen!.



Man kann man auf einer verdrehten Fläche ein rechtes Objekt in ein linkes verwandeln, indem man es über die Verdrehung transportiert;⁸ man kann auch sagen, daß es auf einem Möbiusband keine Händigkeit gibt. Die Eigenschaft des Möbiusbandes heißt in der Sprache der Topologie *Nichtorientierbarkeit*.

⁵ In der Natur findet man ebenfalls eine Händigkeit, z. B. bei der Drehrichtung der Spirale von Schneckenhäusern; auch Moleküle weisen oft linke und rechte Formen auf.

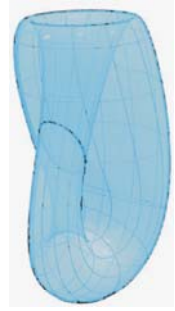
⁶ Edwin Abbot: Flatland. A Romance of Many Dimensions, erschienen 1884. Eine deutsche Übersetzung ist als „Flächenland“ 1982 bei Klett-Cotta erschienen.

⁷ August Ferdinand Möbius, 1790 – 1868, Mathematiker und Astronom an der Universität Leipzig. Er sprach von einem Streifen, der keine „andere Seite“ hat.

⁸ Mit dem Möbiusband sind überraschende Effekte möglich. Schneidet man es z. B. in Längsrichtung durch, erhält man nicht zwei Ringe, sondern einen einzigen, zweifach verdrehten Ring.

So, wie man eine gewölbte Fläche Teil als einer Kugeloberfläche betrachten kann, stellt das Möbiusband einen Teil einer allgemeineren Oberfläche dar. Diese ist allerdings nur im vierdimensionalen Raum ohne Weiteres darstellbar; in drei Dimensionen gelingt dies nur mit einer Selbstdurchdringung. Ein solches Objekt heißt *Kleinsche Flasche*⁹ und hat – ebenso wie das Möbiusband – keinen Rand und keine zwei voneinander unterscheidbaren Seiten, d. h. sie ist nichtorientierbar.

(Ursprünglich soll dieses Objekt im Kleinsche *Fläche* geheißen haben und durch eine Verwechslung von *Flasche* und *Flaeche* als *Klein Bottle* übersetzt worden sein. Nachdem sich diese Bezeichnung durchgesetzt hat, wird auch im Deutschen der Begriff *Flasche* verwendet. Ob sich dies wissenschaftshistorisch belegen läßt, ist mir nicht bekannt.)



Was mit einer zweidimensionalen Fläche möglich ist, könnte vielleicht auch im dreidimensionalen Raum funktionieren. Wäre unser Raum nach Art des Möbiusbandes verdreht, könnten wir den rechten Handschuh auf die Reise schicken, und wenn er dann nach sehr, sehr langer Zeit wieder am Ausgangspunkt ankäme, wäre aus ihm ein linker Handschuh geworden. (Da aber aus den linken Handschuhe rechte werden, entsteht nur den Einarmigen ein Nachteil.) Ob das gedankliche Konstrukt eines solchen Raums eine Entsprechung in der Realität hat, sei dahingestellt.

„What's the point of all this? None whatever, save to give you an exercise in imaginative geometry, a form of mental gymnastics that will help you understand such unusual things as curved space and space closed on itself.“ (George Gamow)

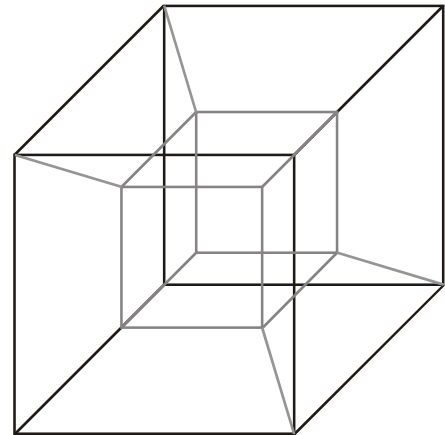
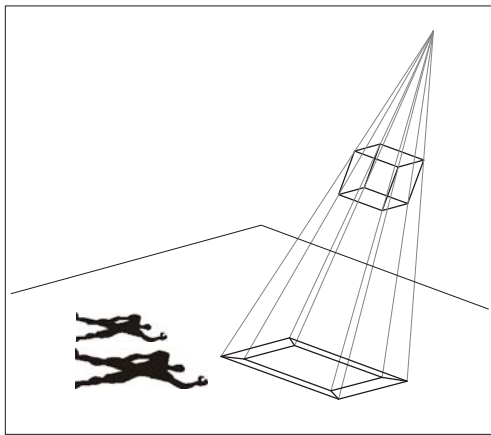
⁹ Felix Klein, 1849-1925, deutscher Mathematiker

2.1 Anschauliches

Im letzten Kapitel war gelegentlich schon mal vom vierdimensionalen Raum die Rede. Solch ein „Über-“ oder „Hyperraum“, in dem z. B. vierdimensionale Würfel oder vierdimensionale Kugeln (bzw. deren Analoga) existieren, erschließt sich unserem Vorstellungsvermögen nicht – ebensowenig wie die Bewohner Flatlands, die nur Quadrate und Kreise kennen, sich ein Bild von Würfeln oder Kugeln machen können. Aber wir können den Flatländern helfen, denn wir beherrschen das Projektionszeichnen. Damit bringen wir gewissermaßen einen dreidimensionalen Körper auf eine zweidimensionale Fläche. Die linke Abbildung zeigt die Projektion eines (durchsichtigen) Würfels auf eine Fläche.

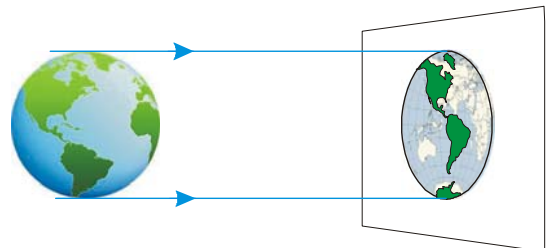
Wird der Würfel zudem noch unter verschiedenen Perspektiven auf die Fläche projiziert, werden die Bewohner Flatlands nach und nach immer mehr Aussagen über die Eigenschaften dieses Gebildes machen können, obwohl es völlig außerhalb ihres Vorstellungsvermögens liegt. Sie können zwar ihre Fläche nicht verlassen,

um sich den Würfel anzusehen, aber aus der Untersuchung der Projektion könnten sie beispielsweise erkennen, daß das Gebilde acht Ecken und zwölf Kanten hat. Erscheinen die Projektionen



dreidimensionaler Körper auf eine Fläche zweidimensional, so nehmen entsprechend die Projektionen vierdimensionaler Hyperkörper in den Raum die Gestalt räumlicher Körper an. Ergibt die Projektion eines gewöhnlichen Würfels auf die Ebene zwei Quadrate, von denen eines innerhalb des anderen liegt und deren Ecken miteinander verbunden sind, zeigt analog dazu die Projektion eines „Hyperwürfels“ in unsere dreidimensionale Welt zwei Würfel, von denen sich einer innerhalb des anderen befindet. Die Ecken sind in ähnlicher Weise miteinander verbunden wie im vorigen Falle. So sind wir in der Lage, zu sagen, daß das Gebilde 16 Ecken, 32 Kanten und 24 Flächen hat. (Die Abbildung ist im Grunde eine weitere Reduzierung in die Papierebene, eine Projektion der Projektion.)

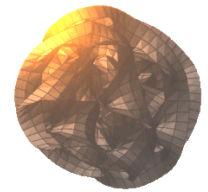
Als weiteres Beispiel betrachten wir die Eigenschaften einer vierdimensionalen Hyperkugel. Einen Ansatz liefert die Projektion einer gewöhnlichen Kugel auf eine ebene Fläche, z. B. die eines durchsichtigen Globus auf eine Wand, so daß sich die beiden Hemisphären überlagern. Sieht man nur die Projektion, erscheint der Abstand zwischen New York und Peking klein, weil jeder Punkt zwei einander gegenüberliegende Punkte auf der dreidimensionalen Kugel darstellt. Die Flächenprojektion einer gewöhnlichen Kugel besteht also aus zwei übereinandergelagerten Scheiben, die am äußeren Rand zusammenhängen. Analog dazu kann eine Hyperkugel so in unseren dreidimensionalen Raum projiziert werden, daß sie zwei „ineinandergesteckte“ Kugeln bildet, die an ihren Außenflächen zusammenhängen. (Man erinnere sich an den „Doppelapfel“.)



Beide Hemisphären liegen in derselben Ebene

Mit solchen Analogien lassen sich Aussagen über die Eigenschaften auch anderer vierdimensionaler Körper herleiten; vierdimensionale Systeme lassen sich mathematisch bzw. geometrisch beschreiben und sind uns daher trotz ihrer Unanschaulichkeit analytisch zugänglich.

Geht es um kompliziert geformte Körper in noch höheren Dimensionen, so lassen sich diese natürlich auch – mit entsprechendem Aufwand – in unseren Raum bzw. letztlich in die Zeichenebene projizieren. Der Erkenntnisgewinn ist meist gering, ein abschreckendes Beispiel ist die Darstellung des sechsdimensionalen „Calabi-Yau-Raumes“ in der populärwissenschaftlichen Literatur – der Adressatenkreis kann mit dieser Zeichnung nicht nur garantiert „nichts anfangen“, sondern macht sich im Wortsinne ein falsches Bild: „Aha, so sieht also ein Calabi-Yau-Raum aus.“



to be continued