Rüdiger Kuhnke

VEKTOREN

E-Mail: rkuhnke@rkuhnke.eu

1 Begriffe, Definitionen, Schreibweisen 3
2 Vektoraddition 3
3 Das Skalarprodukt 4
4 Das Vektorprodukt 7
5 Die Ableitung eines Vektors am Beispiel der Geschwindigkeit 10
6 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem 12
Anhang: Gradient, Divergenz und Rotation 17

v1.0 3/2014
v2.0 4/2014

1 Begriffe, Definitionen, Schreibweisen

Ein *Vektor* ist eine Größe, die durch *Betrag* und *Richtung* gekennzeichnet ist. Beispiele sind die Geschwindigkeit, der Impuls oder die Kraft. Richtungsunabhängige Größen heißen *Skalare.* Beispiele sind die Temperatur, der Druck oder die elektrische Ladung. Auch eine reelle Zahl stellt einen Skalar dar, ebenso der Betrag eines Vektors. Zeichnerisch lässt sich ein Vektor durch Pfeile darstellen (Abbildung 1).

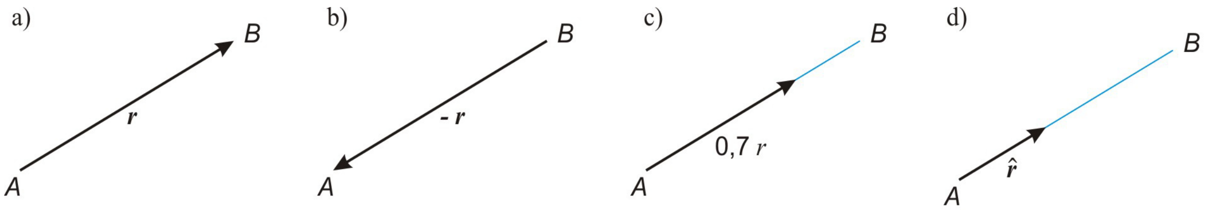

Abb. 1: a) Der Vektor ***r*** stellt eine gerichtete Strecke von A nach B dar. b) Der Vektor – ***r*** hat den gleichen Betrag (die gleiche Länge) wie ***r***, weist aber in die entgegengesetzte Richtung. c) Der Vektor 0,7 ***r*** hat dieselbe Richtung wie ***r***, jedoch ist sein Betrag ist 0,7 *r*. d) Der Vektor ***r*** ist der Einheitsvektôr in der Richtung von ***r***, es ist | ***r*** | = 1.

Man findet verschiedene Schreibweisen für Vektoren, darunter häufig $\vec{r}$, $\vec{\boldsymbol{r}}$ oder ***r***, in diesem Text verwenden wir die letztgenannte Form. Den Betrag kann man als *r* oder $|\boldsymbol{r}|$ schreiben. Ein Vektor mit dem Betrag 1, d. h. $|\boldsymbol{r}| = 1$, heißt *Einheitsvektor*, wir verwenden dafür die Schreibweise $\hat{\boldsymbol{r}}$.

Abbildung 1 d) zeigt die Multiplikation eines Vektors (***r***) mit einem Skalar (0,7). Allgemein bedeutet $\boldsymbol{b} = s\,\boldsymbol{a}$, daß der Vektor ***b*** die Länge von ***a***, multipliziert mit *s*, hat.

Mit dieser Notation lässt sich ***r*** als das Produkt aus seinem Betrag *r* und dem die Richtung festlegenden Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{r}}$ schreiben:

$$\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{r}}\,. \tag{1}$$

Zwei Vektoren ***a*** und ***b*** heißen *gleich*, wenn sie denselben Betrag und dieselbe Richtung haben, wenn also $a = b$ und $\hat{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{b}}$ gilt. Das heißt: Verschiebt man ***a*** ohne Richtungsänderung so, dass sein Anfangspunkt mit dem von ***b*** zusammenfällt, und kommen dann beide Vektoren zur Deckung, sind ***a*** und ***b*** gleich.

2 Vektoraddition

In Kapitel 6 werden Rechenoperationen mit Vektoren erläutert. Auf elemenatrer Ebene ist die zeichnerische Addition zweier Vektoren ***a*** und ***b*** aus dem Kräfteparallelogramm bekannt (Abbildung 2). Es gilt $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, die Vektoraddition ist also *kommutativ*. Analog dazu wird die Summe mehrerer Vektoren gebildet: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$.

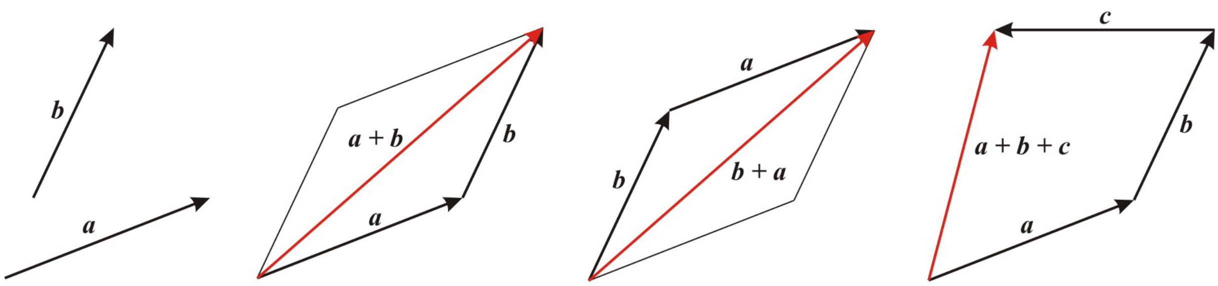

Abb. 2: Die Vektoren ***a*** und ***b***, ihre Vektorsumme ***a*** + ***b*** sowie die Vektorsumme ***b*** + ***a***. Die Vektoradditon ist kommutativ. Entsprechendes gilt für die Addition mehrerer Vektoren.

Entsprechendes gilt für die Subtraktion $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Dabei wird die Richtung des zu subtrahierenden Vektors $\boldsymbol{b}$ umgekehrt und anschließend der so erhaltene Vektor $-\boldsymbol{b}$ zu $\boldsymbol{a}$ addiert (Abbildung 3).

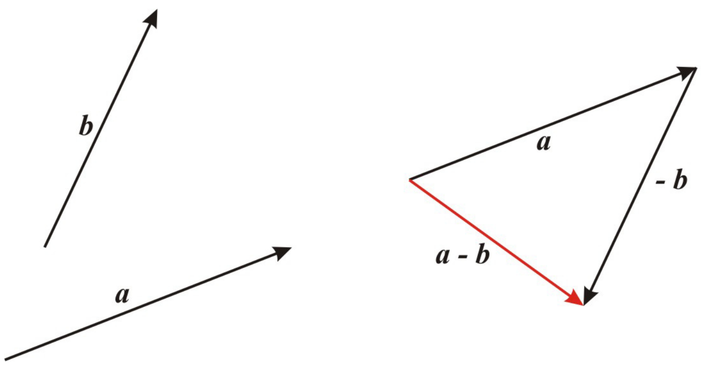

Abb. 3: Die Bildung des Vektors -***b*** durch Richtungsumkehr von ***b*** und die Vektorsubtraktion

Analog zu den bekannten Regeln der Algebra können wir in der Gleichung $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ auf beiden Seiten $\boldsymbol{b}$ addieren und erhalten erwartungsgemäß $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Die Vektoraddition ist *assoziativ*, d. h.

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}. \tag{2}$$

Wenn k ein Skalar ist, gilt

$$k\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}, \tag{3}$$

die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ist also *distributiv*.

Der *Nullvektor* ist definiert als

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

3 Das Skalarprodukt

Eine sinnvolle Definition der Multiplikation zweier Vektoren sollte dem Distributivgesetz genügen. Es gibt zwei Definitionen dieser Art: Eine liefert als Ergebnis einen Skalar, die andere einen Vektor.[1]

Das *Skalarprodukt* (auch *inneres Produkt* oder *Punktprodukt* genannt) zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ist ein Skalar, und zwar die Zahl, die man erhält, wenn man die Beträge von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und den Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels multipliziert:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a \cdot b \cdot \cos\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{5}$$

Mit dieser Definition ist das Skalarprodukt unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems. Außerdem ist wegen $\cos\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \cos\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ das Skalarprodukt *kommutativ*.

Liegt der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ eingeschlossene Winkel zwischen $\pi/2$ und $3\pi/2$, d. h. zwischen 90 ° und 270 °, ist $\cos\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ und damit $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ negativ.

Ist $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, so ist $\cos\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1$ und es gilt

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^2 = |\boldsymbol{a}|^2. \tag{6}$$

[1] Eine „einfache" Definition, z. B. das Produkt der Beträge ab, ist zwar möglich, würde aber das Distributivgesetz nicht erfüllen.

Wenn a ≠ 0, b ≠ 0, aber $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, heißt das, dass der Winkel zwischen den Vektoren 90 ° beträgt, $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ stehen also senkrecht aufeinander; man sagt auch, sie sind *orthogonal*.

Bildet man das Skalarprodukt aus den Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{a}}$ und $\hat{\boldsymbol{b}}$, erhält man

$$\hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}), \text{ kurz} \tag{7}$$

$$\cos(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) = \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} \tag{8}$$

d. h. das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren ist der Kosinus des Winkels zwischen ihnen.

Die Projektion von $\boldsymbol{b}$ auf $\boldsymbol{a}$ ist

$$b \cdot \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = b \cdot \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{a}}\,. \tag{9}$$

(Abbildung 4 a). Für die Projektion von $\boldsymbol{a}$ auf $\boldsymbol{b}$ (Abbildung 4 b) gilt entsprechend

$$a \cdot \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}\,. \tag{10}$$

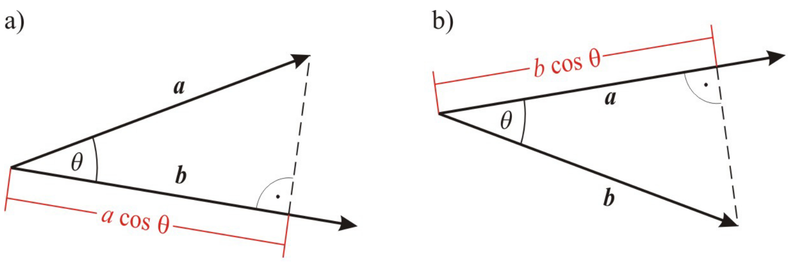

Abb. 4: Die Projektionen $a \cos \Theta$ und $b \cos \Theta$

Die skalare Multiplikation hat keine Umkehrung: ist $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = b$, gibt es keine eindeutige und damit sinnvolle Lösung für $\boldsymbol{x}$. Die Division durch einen Vektor ist nicht definiert.

Beispiel 1: Der Kosinussatz

Es sei $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Durch Quadrieren

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} \tag{11}$$

erhält man

$$a^2 + b^2 - 2\, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = c^2 \tag{12}$$

und dies ist genau der aus der Trigonometrie bekannte *Kosinussatz*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{13}$$

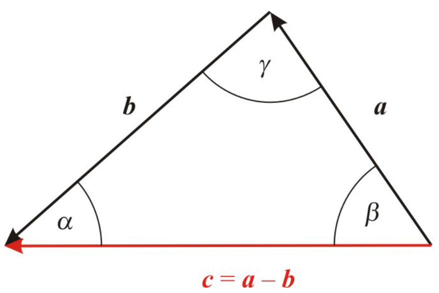

Abb. 5: Der Kosinussatz
$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = c^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = a^2 + b^2 - 2\, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos \gamma$
Analog gilt $b^2 = a^2 + c^2 - 2\, ac \cos \beta$ und $a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos \alpha$

Zur Erinnerung: Der Kosinussatz ist anwendbar, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Ist in Abbildung 5 der Winkel γ ein Rechter, also $\cos \gamma = 0$, so erhält man die bekannte Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$. Man nennt den Kosinussatz auch den *erweiterten Satz des Pythagoras* oder den *trigonometrischen Pythagoras*.

Beispiel 2: Die Ebenengleichung

Gegeben sei eine Ebene und ein außerhalb von ihr liegender Punkt O (Abbildung 6). Ein von O senkrecht auf die Ebene gefällter Vektor $\boldsymbol{N}$ stellt die *Normale* auf die Ebene vom Ursprung O dar. Des weiteren betrachte man einen Vektor $\boldsymbol{r}$ von O zu einem beliebigen Punkt P in der Ebene. Dann muss die Projektion von $\boldsymbol{r}$ auf $\boldsymbol{N}$ gleich dem Betrag N sein; es gilt $N = r \cdot \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N})$ und wegen $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = N\, r \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N})$ erhält man

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = N^2. \tag{14}$$

Mit $\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}$ und $\boldsymbol{N} = N_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + N_y\,\hat{\boldsymbol{y}} + N_z\,\hat{\boldsymbol{z}}$ kann man Gleichung (14) als

$$(x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (N_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + N_y\,\hat{\boldsymbol{y}} + N_z\,\hat{\boldsymbol{z}}) = N^2 \tag{15}$$

schreiben, oder ausmultipliziert als

$$xN_x + yN_y + zN_z = N^2 \tag{16}$$

oder

$$x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1, \tag{17}$$

was mit der Ebenengleichung $ax + by + cz = 1$ aus der analytischen Geometrie konsistent ist.

Beispiel 3: Elektrische und magnetische Feldstärke

Die elektrische und magnetische Feldstärke einer sich ausbreitenden elektromagnetischen Welle werden durch die Vektoren $\boldsymbol{E}$ (elektrisches Feld) und $\boldsymbol{B}$ (magnetisches Feld) beschrieben. Beide Vektoren liegen in einer zur Ausbreitungsrichtung $\hat{\boldsymbol{k}}$ der Welle senkrechten Ebene und stehen ihrerseits senkrecht aufeinander (Abbildung 7). Skalarprodukte ermöglichen eine einfache Beschreibung dieser geometrischen Gegebenheiten:

$$\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{E} = 0,\ \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{B} = 0,\ \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{18}$$

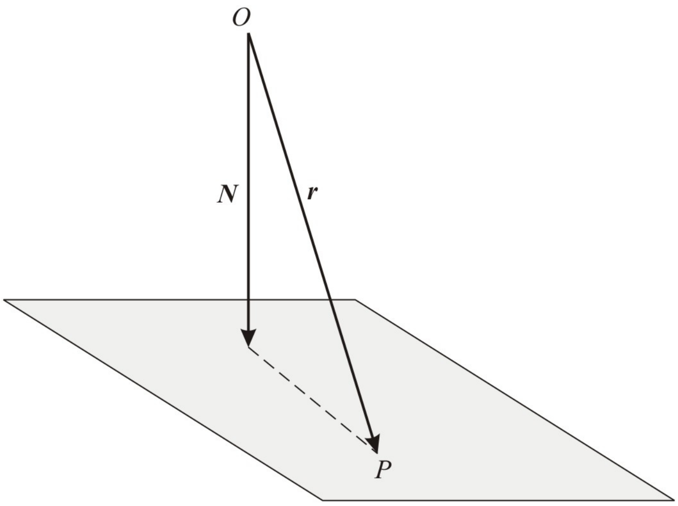

Abb. 6: Die Ebenengleichung $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = N^2$

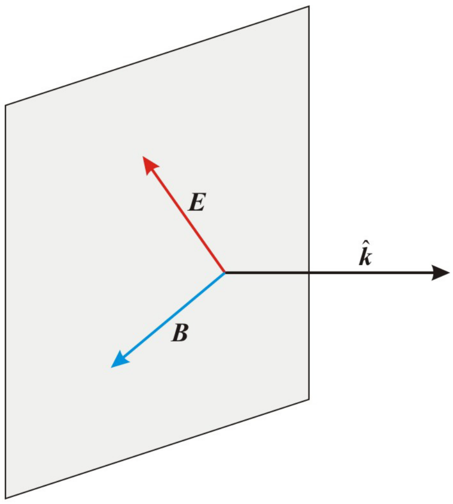

Abb. 7: Die zur Ausbreitungsrichtung $\hat{\boldsymbol{k}}$ senkrechten Feldvektoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$.

4 Das Vektorprodukt

Das *Vektorprodukt* (auch *äußeres Produkt* oder *Kreuzprodukt* genannt) zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist definiert als der Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, der zu der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht und den Betrag $a \cdot b \cdot |\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ hat.
Die Richtung von $\boldsymbol{c}$ wird (nach Übereinkunft) durch die *Rechte-Hand-Regel* (Abbildung 8) bestimmt: Den als ersten Faktor des Produkts stehenden Vektor $\boldsymbol{a}$ dreht man um den kleineren Winkel in die Richtung von $\boldsymbol{b}$. Die Richtung von $\boldsymbol{c}$ ist dann durch die Rechte-Hand-Regel gegeben: stellt der Zeigefinger der rechten Hand den Vektor $\boldsymbol{a}$ und der Mittelfinger den Vektor $\boldsymbol{b}$ dar, so weist der Daumen in die Richtung von $\boldsymbol{c}$. (Dadurch wird übrigens ein *Rechtssystem* oder *Rechtsdreibein* definiert.)

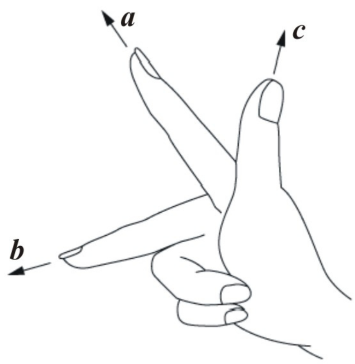

Abb. 8: Die Rechte-Hand-Regel

Entsprechend dieser Definition haben $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ entgegengesetzte Vorzeichen (Abbildung 9), das Vektorprodukt ist also *nicht kommutativ*:

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{19}$$

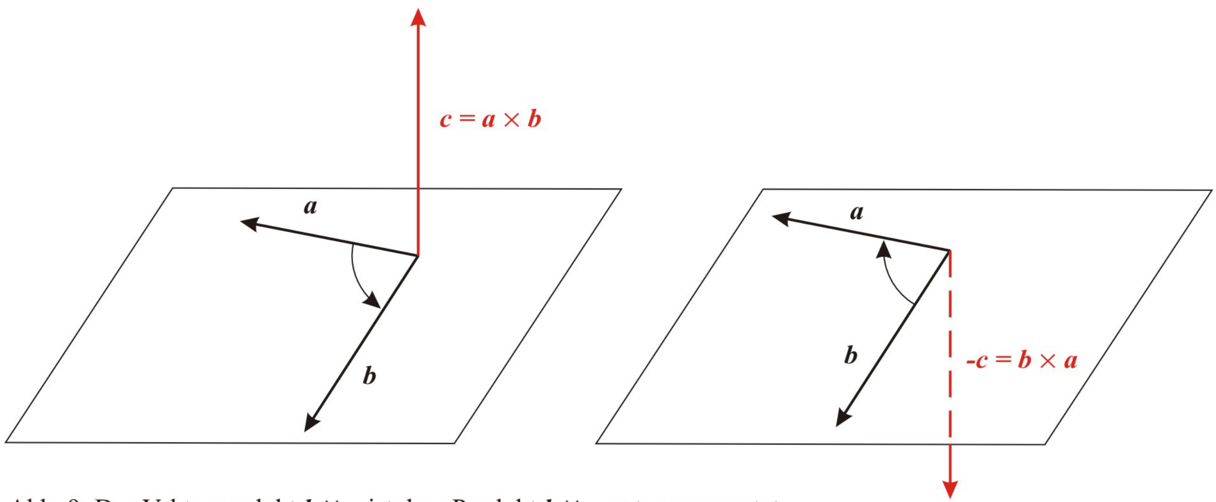

Abb. 9: Das Vektorprodukt $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ ist dem Produkt $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ entgegengesetzt.

Es ist jedoch distributiv:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}. \tag{20}$$

Wegen $\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ verschwindet das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.

Beispiel 1: Die Fläche eines Parallelogramms

Der Betrag des Vektorprodukts $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$,

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = a\, b\, |\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \tag{21}$$

gibt den Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ an (Abbildung 10). Der Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ steht senkrecht auf der Parallelogrammfläche und definiert damit ihre Orientierung. (Den senkrecht auf der Ebene stehenden Vektor nenn man auch *Normalenvektor*, für den Betrag $|\boldsymbol{c}|$ gibt es im angelsächsischen Sprachraum die Bezeichnung *vector area*.)

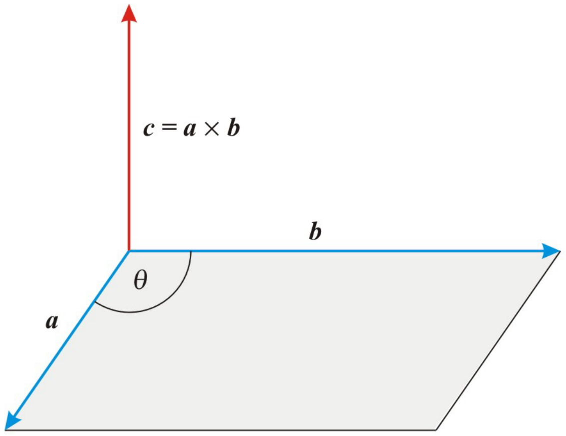

Abb. 10: $|\boldsymbol{c}|$ gibt den Flächeninhalt des Parallelogramms an.

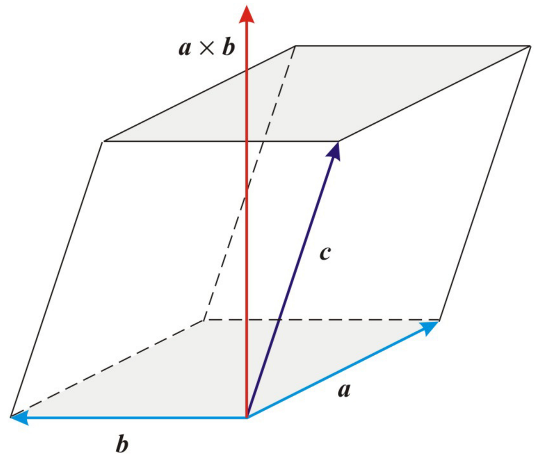

Abb. 11: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ = Grundfläche · Kantenhöhe, das Volumen des Parallelepipeds.

Beispiel 2: Das Volumen eines Parallelepipeds, das Spatprodukt

Ein „schiefer Quader" wie in Abbildung 11 heißt *Parallelepiped* oder *Spat*. Die Grundfläche beträgt $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ und $\boldsymbol{c}$ ist die Kantenhöhe, womit sich das Volumen V (ein Skalar) zu

$$|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = V \tag{22}$$

ergibt. Man nennt ein solches Produkt *gemischtes Produkt* oder *Spatprodukt*.

Ist das Parallelepiped „unschief", wird es zum Quader, wobei der Zusammenhang zwischen den einzelnen Vektoren und dem Volumen sofort einsichtig ist. Liegen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ in einer Ebene, so verschwindet das Volumen und $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$.

Kippen wir den Körper um 90° aus der Papierebene heraus, wird die Fläche $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ zur Grundfläche und $\boldsymbol{a}$ zur Kantenhöhe. Dann ergibt sich das Volumen zu $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$, und da dies dasselbe Volumen wie in Gleichung (22) ist, gilt

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{23}$$

In gemischten Produkten können Kreuz und Punkt ohne Einfluss auf das Ergebnis vertauscht werden. Werden hingegen in einem Spatprodukt die Vektoren antizyklisch[2] vertauscht, ändert sich das Vorzeichen:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}). \tag{24}$$

Beispiel 3: Der Sinussatz

Gegeben sei ein durch $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ beschriebenes Dreieck. Bildet man auf beiden Seiten das Vektorprodukt mit $\boldsymbol{a}$, erhält man

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{25}$$

Da $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$ ist und beide Seiten einander gleich sein müssen, erhält man

$$ac\,|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})| = ab\,|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \tag{26}$$

oder

$$\frac{\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})}{\boldsymbol{b}} = \frac{\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\boldsymbol{c}}, \tag{27}$$

was den *Sinussatz* für Dreiecke darstellt.

---

[2] Zyklische Vertauschungen von *abc* sind *bca* und *cab*, antizyklische Vertauschungen hingegen *acb* und *bac*.

Dreifachprodukte

Das Dreifachprodukt $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ bietet keine Besonderheiten, es ist einfach das Skalarprodukt des Vektors $\boldsymbol{c}$ mit dem Skalar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Das Produkt $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ heißt *dreifaches Vektorprodukt* und stellt einen Vektor dar, der sowohl senkrecht zu $\boldsymbol{a}$ als auch zu $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ steht. Nun steht $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ senkrecht auf der von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Ebene, also liegt $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ in dieser Ebene.
In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \tag{28}$$

ein in der von $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ aufgespannten Ebene liegender Vektor ist, der senkrecht auf $\boldsymbol{c}$ steht.
Wichtig ist die Position der Klammern: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ (Abbildung 12).

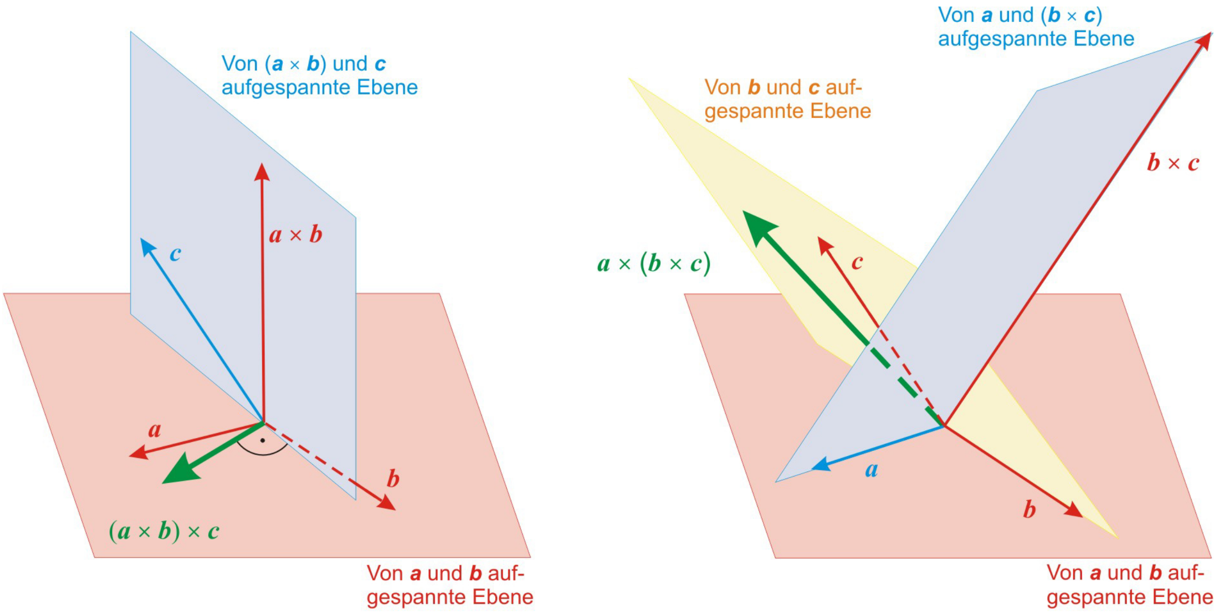

Abb. 12: Links das Dreifachprodukt $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, es steht senkrecht auf der von $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Ebene und liegt zugleich in der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene. Rechts das Dreifachprodukt $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, es steht senkrecht zur von $\boldsymbol{a}$ und $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ aufgespannten Ebene und liegt zugleich in der von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Ebene. Ganz offensichtlich sind $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ verschiedene Vektoren.

Leicht zeigen lässt sich auch folgender Sachverhalt:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{29}$$

Beispiel 4: Kraft auf eine Ladung im Magnetfeld

Die Kraft auf eine bewegte elektrische Ladung Q in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ ist proportional derjenigen Komponente von $\boldsymbol{B}$, die senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ steht. Das Vektoprodukt erlaubt eine einfache Darstellung des Zusammenhangs (Abbildung 13):

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{30}$$ [3]

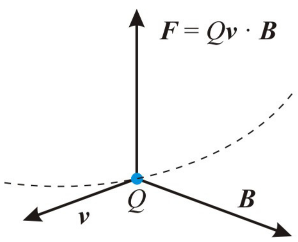

Abb. 13: Kraft auf eine Ladung in einem Magnetfeld

[3] Je nach Wahl der Einheiten hat man einen unterschiedlichen Proportionalitätsfaktor. Im cgs-System erhält man $\boldsymbol{F} = \frac{Q}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ mit c als Lichtgeschwindigkeit.

5 Die Ableitung eines Vektors am Beispiel der Geschwindigkeit

Die Position eines Objekts ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt durch den *Ortsvektor* $\boldsymbol{r}(t)$ gegeben, der von einem Bezugspunkt O aus zum Ort des Objekts weist (Abbildung 14 a). Bewegt sich das Objekt, ändern sich fortlaufend Betrag und Richtung des Ortsverktors. Wie Abbildung 14 c zeigt, ist $\Delta\boldsymbol{r}$ die Differenz zwischen den Ortsvektoren zur Zeit t_2 und t_1, d. h. zwischen $\boldsymbol{r}(t_2)$ und $\boldsymbol{r}(t_1)$

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1). \tag{31}$$

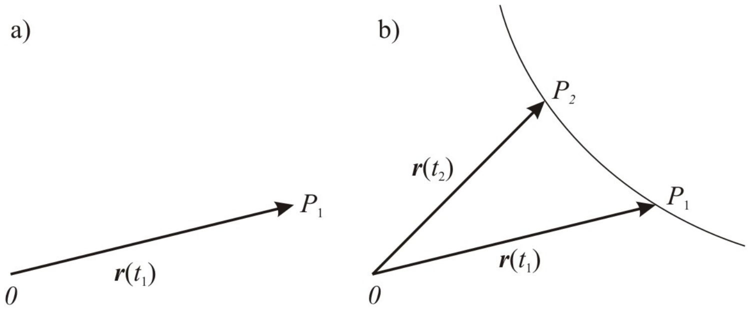

Abb. 14: a) Die Position P_1 des Objekts relativ zu O zur Zeit t_1. b) Das Objekt bewegt sich und hat zur Zeit t_2 die Position P_2. c) Der Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ ist die Differenz zwischen $\boldsymbol{r}(t_2)$ und $\boldsymbol{r}(t_1)$

$\Delta\boldsymbol{r}$ stellt die Sehne $\overline{P_1P_2}$ auf der Bahn des Objekts dar (Abbildung 15 a). Der Vektor

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{32}$$

(d. i. $\Delta\boldsymbol{r}$ mit dem Faktor $1/\Delta t$ multipliziert) stellt einen mit der Sehne richtungsgleichen Vektor dar (Abbildung 15 b). Bei $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$ wird er schließlich zum Tangentenvektor an die Bahn im Punkt P_1, zum *Vektor* $d\boldsymbol{r}/dt$ (Abbildung 15 c). Dieser Vektor ist die Ableitung von $\boldsymbol{r}$ nach der Zeit.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{33}$$

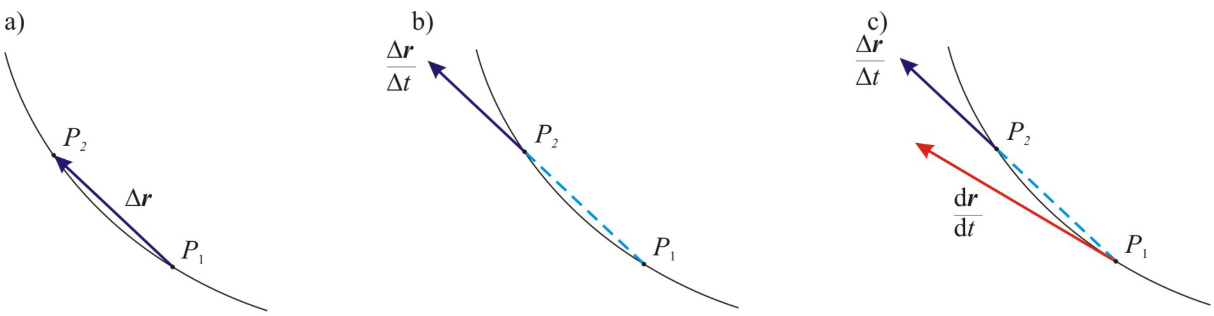

Abb. 15: a) Die Differenz $\Delta\boldsymbol{r}$ stellt die Verbindungslinie zwische P_1 und P_2 auf der Bahn des Objekts dar. b) Der mit $\overline{P_1P_2}$ richtungsgleiche Vektor $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$. c) Geht Δt gegen Null, wird $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ zu $d\boldsymbol{r}/dt$.

In der Physik findet man für die zeitliche Ableitung häufig die Schreibweise mit einem Punkt über der zu differenzierenden Größe: $\dot{\boldsymbol{r}} \equiv d\boldsymbol{r}/dt$.

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit und damit die zweite Ableitung des Ortes:

$$\boldsymbol{a} := \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{34}$$

Ableitung eines Produkts aus Skalar und Vektor

Wie in der letzten Rechnung betrachten wir ein sich bewegendes Objekt, dessen Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ durch die Länge $r(t)$ und die Richtung $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$ gegeben ist:

$$\boldsymbol{r}(t) = r(t)\,\hat{\boldsymbol{r}}(t). \tag{35}$$

Die Ableitung dieses Produkts aus einem Skalar und einem Vektor ist gegeben durch

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt} r(t)\,\hat{\boldsymbol{r}}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{r(t+\Delta t)\,\hat{r}(t+\Delta t) - r(t)\hat{r}(t)}{\Delta t} \tag{36}$$

Mit einer Umformung des Zählers erhalten wir

$$(r(t) + \frac{d\,r}{dt}\Delta t)\,(\hat{\boldsymbol{r}}(t) + \frac{d\,\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}\Delta t) - r(t)\,\hat{\boldsymbol{r}}(t) = \Delta t(\frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\,\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}) + (\Delta t^2)(\frac{dr}{dt}\frac{d\,\hat{\boldsymbol{r}}}{dt})\,. \tag{37}$$

Bei $\Delta t \to 0$ kann der letzte Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden, so dass

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\,\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\,\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} \tag{38}$$

Der erste Beitrag zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in dieser Gleichung stammt von der Richtungsänderung des Ortsvektors, der andere von der Änderung seiner Länge.

Beispiel: Ein Objekt auf einer Kreisbahn

Ein Objekt, dessen Position durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ beschrieben sei, bewege sich gleichförmig auf einer Kreisbahn mit dem Radius r:

$$\boldsymbol{r}(t) = r\,\hat{\boldsymbol{r}}(t). \tag{39}$$

In diesem Fall ist r keine Funktion der Zeit, und der Einheitsvektor rotiert mit konstanter Umdrehungszahl. Das lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\hat{\boldsymbol{r}}(t) = \cos \omega t\, \hat{\boldsymbol{x}} + \sin \omega t\, \hat{\boldsymbol{y}}\,, \tag{40}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{x}}$ und $\hat{\boldsymbol{y}}$ zwei senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren sind. Die Konstante ω heißt *Winkelgeschwindigkeit* oder *Kreisfrequenz* und wird in s^{-1} oder in rad/s angegeben.
Ist ω positiv, rotiert der Vektor $\hat{\boldsymbol{r}}$ gegen den Uhrzeigersinn, und nach einem Zeitintervall t bildet er mit der x-Richtung den Winkel ωt. (Bei $t = 0$ liegt der $\hat{\boldsymbol{r}}$ längs der x-Achse.)
Betrachten wir beispielsweise den Zeitpunkt, an dem der Winkel $\omega t = ¼\,\pi$, also 45° beträgt: Mit cos ¼ π = sin ¼ π = gilt dann

$$\hat{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \tag{41}$$

was einen Einheitsvektor im Winkel von 45° zur x-Achse darstellt. Später, bei $\omega t = ½\,\pi$ (d. h. bei 90°) haben wir es mit cos ½ π = 0 und sin ½ π = 1 zu tun, so dass

$$\hat{\boldsymbol{r}}(t) = \hat{\boldsymbol{y}}\,. \tag{42}$$

Abbildung 16 zeigt die genannten Stellungen des Einheitsverktors.

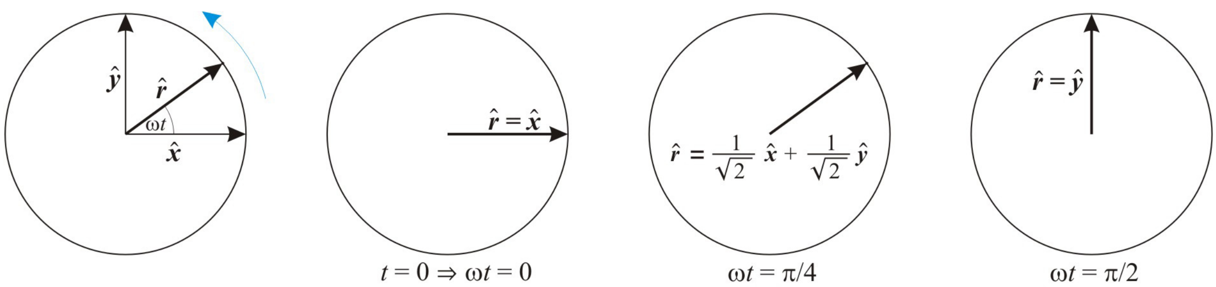

Abb. 16: Kreisbewegung. Ein Objekt bewegt sich auf einem Einheitskreis mit der Winkelgeschindigkeit ω. Der Einheitsvektor ist für drei verschiedene Zeiten dargestellt.

Wie schnell bewegt sich das Objekt auf der kreisförmigen Bahn? Wir verwenden Gleichung (39)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}, \tag{43}$$

setzen aber $dr/dt = 0$, weil r konstant ist. Mit den Gleichungen (39) und (40) erhalten wir

$$\boldsymbol{v} = r\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = r(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{d}{dt}\cos\omega t + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{d}{dt}\sin\omega t). \tag{44}$$

Mit den bekannten Ableitungen der Winkelfunktionen wird daraus

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = r(-\omega\sin\omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} + \omega\sin\omega t\ \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{45}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist ωr. Mit der Definition des Skalarprodekts, der Eigenschaft $\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = 0$ und der Identität $\sin^2 + \cos^2 = 1$ lässt sich v wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} v^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} &= \omega^2 r^2 (-\sin\ \omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\ \omega t\ \hat{\boldsymbol{y}}) \cdot (-\sin\ \omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\ \omega t\ \hat{\boldsymbol{y}}) \\ &= \omega^2 r^2 (\sin^2\ \omega t + \cos^2\ \omega t) = \omega^2 r^2 \end{aligned} \tag{46}$$

Damit erhalten wir für die Geschwindigkeit des Objekts auf der Kreisbahn

$$v = \omega r. \tag{47}$$

Differenzieren von Gleichung (45) liefert die Beschleunigung, die *Zentripetalbeschleunigung*:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = r(-\omega^2\cos\omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} - \omega^2\sin\omega t\ \hat{\boldsymbol{y}}). \tag{48}$$

Betrachten wir nochmal die Gleichungen (39) und (40): Die rechte Seite in Gleichung (48) ist gerade $-\omega^2\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 r(\cos\omega t\ \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\omega t\ \hat{\boldsymbol{y}}) = -\omega^2\boldsymbol{r}. \tag{49}$$

Offensichtlich ist die Richtung der Beschleunigung $-\boldsymbol{r}$, d. h. in Richtung auf den Kreismittelpunkt. Ihr Betrag ist

$$a = \omega^2 r \tag{50}$$

Da nach Gleichung (47) $v = \omega r$ gilt, können wir die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{51}$$

Die Kreisfrequenz ω steht in einer einfachen Beziehung zur gewöhnlichen Frequenz f. ω gibt an, wieviel rad pro Sekunde überstrichen werden; f gibt an, wie viele Vollkreise pro Sekunde überstrichen werden. Da 2π rad einen Vollkreis bilden, ergibt sich

$$2\pi f = \omega. \tag{52}$$

6 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

Ein kartesisches Koordinatensystem ist durch drei senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ definiert, deren Richtung durch die Rechte-Hand-Regel gegeben ist.

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} \tag{53}$$

(Abbildung 17 a). Einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ (Abbildung 17 b) kann man als

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{54}$$

oder auch als

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{55}$$

schreiben, wobei a_x, a_y, a_z *Komponenten* von $\boldsymbol{a}$ heißen[4] und die jeweiligen Projektionen von $\boldsymbol{a}$ auf die zugehörigen Koordinatenachsen darstellen (siehe unten, Rechenbeispiel 2, Abbildung 18). Das heißt:

$$a_x = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = a \cos(\boldsymbol{a}, \hat{\boldsymbol{x}}), \tag{56}$$

entsprechendes gilt für a_y und a_z.

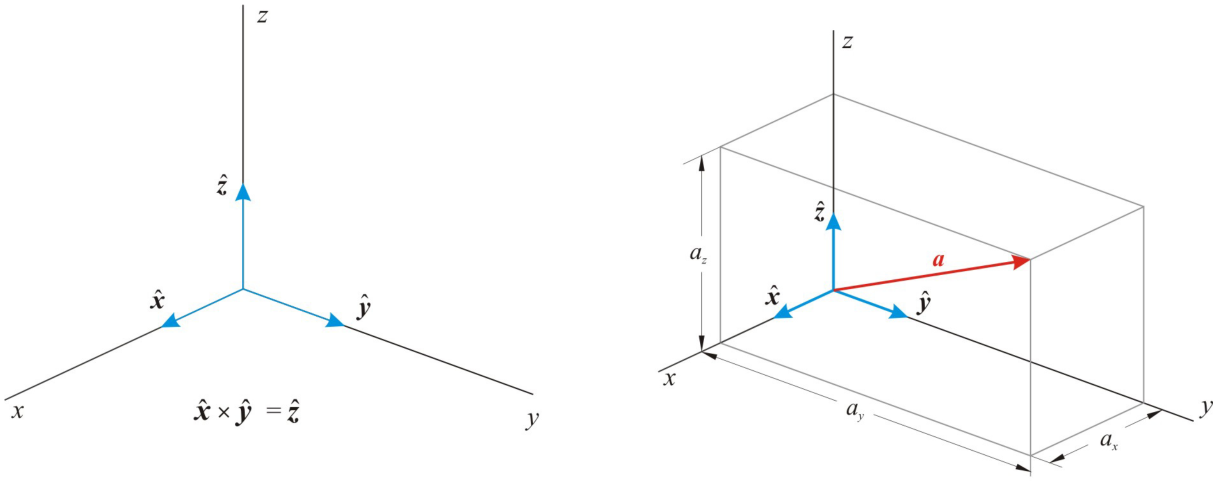

Abb. 17: a) Die orthogonalen Einheitsvektoren bilden ein kartesisches Koordinatensystem. b) $\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{x}}a_x + \hat{\boldsymbol{y}}a_y + \hat{\boldsymbol{z}}a_z$

Quadrieren von $\boldsymbol{a}$ liefert

$$a^2 = a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}, \tag{57}$$

woraus man durch Wurzelziehen den Betrag erhält

Die Summe zweier Vektoren ergibt sich durch die Addition ihrer Komponenten:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z). \tag{58}$$

Der Nullvektor ist

$$\boldsymbol{0} = (0, 0, 0). \tag{59}$$

Das Skalarprodukt schreibt sich als

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{60}$$

Das Vektorprodukt stellt sich in kartesischen Koordinaten (mit $\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = 0$) als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (\hat{\boldsymbol{x}}\, a_x + \hat{\boldsymbol{y}}\, a_y + \hat{\boldsymbol{z}}\, a_z) \times (\hat{\boldsymbol{x}}\, b_x + \hat{\boldsymbol{y}}\, b_y + \hat{\boldsymbol{z}}\, b_z) \\ &= (\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}})a_x b_y + (\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{z}})a_x b_z + (\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{x}})a_y b_x + (\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}})a_y b_z \\ &\quad + (\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}})a_z b_x + (\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}})a_z b_y. \end{aligned} \tag{61}$$

dar. Nun ist

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}}, \quad \hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}} \quad \text{und} \\ &\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{x}} = -\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = -\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = -\hat{\boldsymbol{y}}. \end{aligned} \tag{62}$$

Damit reduziert sich Gleichung (61) zu

[4] Es lässt sich leicht zeigen, dass $a_x = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}$ ist:
$\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = a_x \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a_y \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a_z \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = a_x$, weil $\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = 1$, $\hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = 0$ und $\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = 0$ gilt.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{x}}\,(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{\boldsymbol{y}}\,(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{\boldsymbol{z}}\,(a_x b_y - a_y b_x). \tag{63}$$

Dies lässt sich einfacher durch eine Determinante ausdrücken:[5]

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{64}$$

Rechenbeispiele I

1. Um die Länge des Vektors

$$\boldsymbol{a} = 3\,\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\,\hat{\boldsymbol{z}}\,. \tag{65}$$

zu bestimmen, bilden wir gemäß Gleichung (57) zunächst a^2:

$$a^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 \tag{66}$$

und erhalten damit die Länge des Vektors zu $a = \sqrt{14}$.

2. Welche Länge hat die Projektion des Vektors $\boldsymbol{a}$ auf die xy-Ebene?
Die Projektion ist $3\,\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}$ (Abbildung 18), ihre Länge ergibt sich (wie in Beispiel 1) zu $\sqrt{10}$.

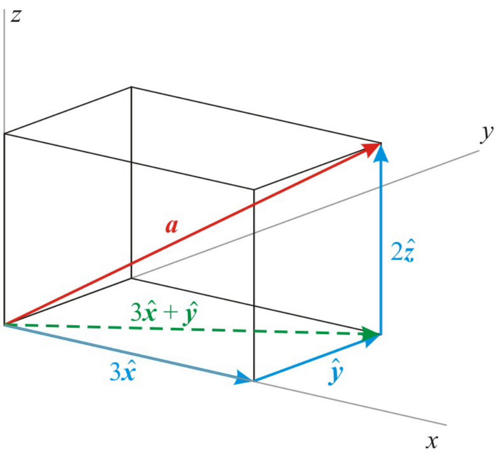

Abb. 18: Die Projektion von $\boldsymbol{a}$ in die xy-Ebene

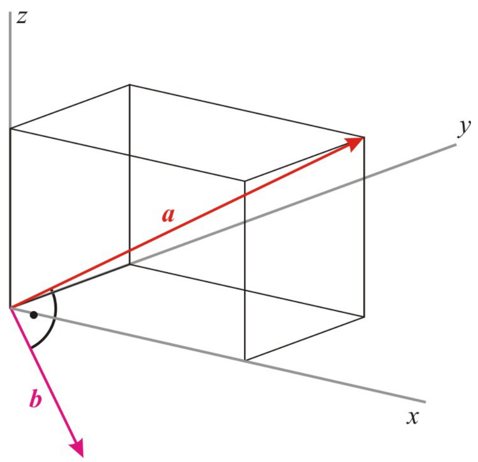

Abb. 19: $\boldsymbol{b}$ liegt in der xy-Ebene und ist senkrecht zu $\boldsymbol{a}$

3. Wie konstruiert man einen zu $\boldsymbol{a}$ senkrechten Vektor $\boldsymbol{b}$ in der xy-Ebene (Abbildung 19)?
Der Vektor $\boldsymbol{b}$ hat die Form

$$\boldsymbol{b} = b_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + b_y\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{67}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$; d. h. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ bzw.

---

[5] Die Sarrus-Regel zur Berechnung dreireihiger Determinanten:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \end{array}$$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & + & + & + \\ \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12} + a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$(3\,\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\,\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (b_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + b_y\,\hat{\boldsymbol{y}}) = 0 \tag{68}$$

Mit diesem Skalarprodukt erhalten wir

$$3b_x + b_y = 0 \;\Leftrightarrow\; b_y/b_x = -3. \tag{69}$$

(Die Länge von $\boldsymbol{b}$ lässt sich aus der Aufgabenstellung übrigens nicht bestimmen.)

4. Wie erhält man den Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{b}}$ aus dem letzten Beispiel (Abbildung 19)?
Das erfordert $b_x^2 + b_y^2 = 1$ oder

$$b_x^2\,(1^2 + 3^2) = 1 \;\Leftrightarrow\; 10b_x^2 = 1 \tag{70}$$

Daraus folgt

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \sqrt{\frac{1}{10}}\,\hat{\boldsymbol{x}} - \sqrt{\frac{9}{10}}\,\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\hat{\boldsymbol{x}} - 3\hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{10}} \tag{71}$$

5. Wie lautet das Skalarprodukt aus $\boldsymbol{a}$ und dem Vektor $\boldsymbol{c} = 2\,\hat{\boldsymbol{x}}$?
Nach Gleichung (60) ist $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = a_x c_x + a_y c_y$, also $3 \cdot 2 = 6$.

6. Vektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$?

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = (3\text{–}2)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\,\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\,\hat{\boldsymbol{z}}\,. \tag{72}$$

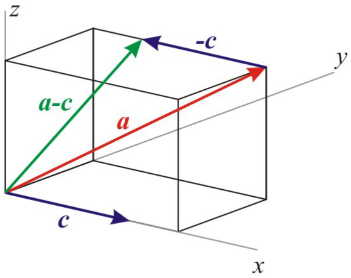

Abb. 20: Vektor ***a-c***

Die Richtungskosinus

In Komponentenschreibweise sieht der Betrag des Vektors $\boldsymbol{a}$ folgendermaßen aus:

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{(a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\hat{\boldsymbol{z}})\cdot(a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\hat{\boldsymbol{z}})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{73}$$

Den Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{a}}$ erhält man nach Gleichung (1) und der Fußnote zu Gleichung (55) als:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{a}} &= \hat{\boldsymbol{x}}\cos(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{x}}) + \hat{\boldsymbol{y}}\cos(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{y}}) + \hat{\boldsymbol{z}}\cos(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{z}}) \quad \text{oder} \\ \hat{\boldsymbol{a}} &= (\cos(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{x}}), \cos(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{y}}), \cos(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{z}})) \end{aligned} \tag{74}$$

Die drei Kosinus in dieser Gleichung heißen *Richtungskosinus* von $\hat{\boldsymbol{a}}$, bezogen auf die Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ des kartesischen Koordinatensystems (Abbildung 21). Anders ausgedrückt: Die Koordinaten eines Einheitsvektors sind seine Richtungskosinus.[6]

Quadrieren von Gleichung (74) zeigt, dass die Quadratsumme der Richtungskosinusse gleich Eins ist:

$$\cos^2(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{x}}) + \cos^2(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{y}}) + \cos^2(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{z}}) = 1 \tag{75}$$

[6] Auch der Plural *Richtungskosinusse* ist erlaubt.

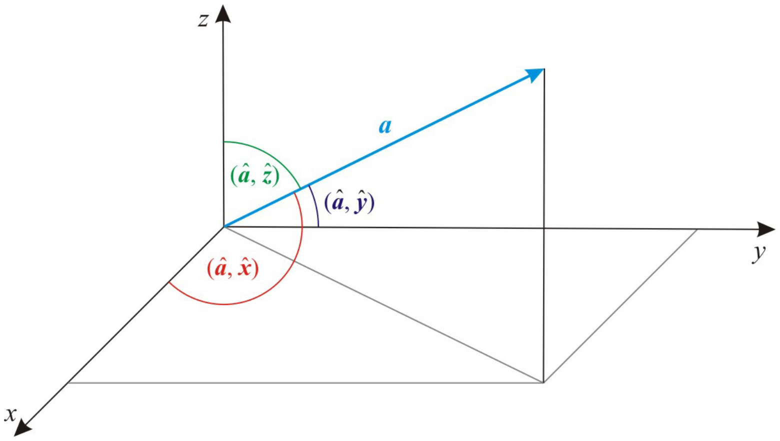

Abb. 21: Die Winkel, auf die sich die Richtungskosinus beziehen

Invarianz unter Drehung des Bezugssystems

Drehen wir das Koordinatensystem aus Abbildung 17 b um seinen Ursprung in eine neue Position, so dass sich die neuen Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{x}}'$, $\hat{\boldsymbol{y}}'$ und $\hat{\boldsymbol{z}}'$ ergeben, benennen wir die Komponenten des (nicht mitgedrehten) Vektors $\boldsymbol{a}$ in $a_{x'}$, $a_{y'}$ und $a_{z'}$ um, so dass

$$\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{x}}'a_{x'} + \hat{\boldsymbol{y}}'a_{y'} + \hat{\boldsymbol{z}}'a_{z'} \tag{76}$$

gilt. Auf die Länge a des Vektors hat die Rotation des Bezugssystems keinen Einfluss, d. h. es ist $a^2 = a'^2$ oder

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2. \tag{77}$$

Man sagt, die Göße a^2 sei *invariant* gegenüber Rotationen.

Offensichtlich ist auch das Skalarprodukt invariant, denn bei Drehung des Bezugssystems ändern sich weder die Beträge der Vektoren noch der Winkel zwischen ihnen.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b \cdot \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{78}$$

Gleiches gilt für den Betrag des Vektorprodukts, denn der Flächeninhalt des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms ändert sich bei Rotation des Koordinatensystems nicht.

Rechenbeispiele II

7. Wie werden $\boldsymbol{a} = 3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}$ und $\boldsymbol{c} = 2\hat{\boldsymbol{x}}$ in einem Bezugssystem dargestellt, das – wie in Abbildung 22 gezeigt – aus den bisherigen Koordinaten (vgl. Abbildung 17 b) durch die Rotation um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn hervorgeht?

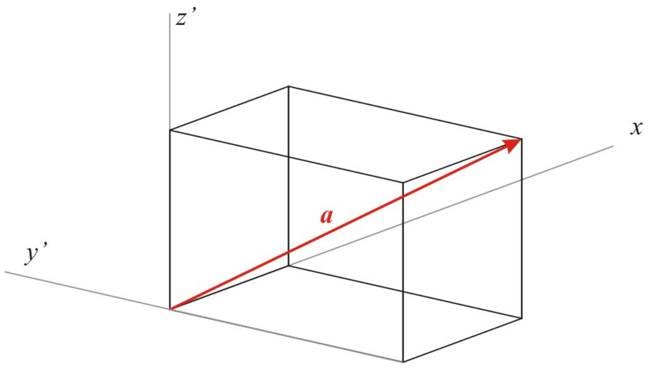

Abb. 22: Das gestrichene System x', y', z' geht aus dem ungestrichenen System x, y, z durch Rotation um $+\pi/2$ um die z-Achse hervor.

Die Einheitsvektoren des neuen Bezugssystems bezeichnen wir mit $\hat{\boldsymbol{x}}'$, $\hat{\boldsymbol{y}}'$, $\hat{\boldsymbol{z}}'$. Sie stehen mit $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ in der Beziehung

$$\hat{\boldsymbol{x}}' = \hat{\boldsymbol{y}}, \quad \hat{\boldsymbol{y}}' = -\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \hat{\boldsymbol{z}}' = \hat{\boldsymbol{z}}. \tag{79}$$

Wo also vorher $\hat{\boldsymbol{x}}$ stand, steht jetzt $-\hat{\boldsymbol{y}}$'; wo vorher $\hat{\boldsymbol{y}}$ stand, steht jetzt $\hat{\boldsymbol{x}}$'. Damit haben wir

$$\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{x}}' - 3\hat{\boldsymbol{y}}' + 2\hat{\boldsymbol{z}}', \quad \boldsymbol{c} = -2\hat{\boldsymbol{y}}'. \tag{80}$$

8. Wie lautet das Skalarprodukt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ im gestrichenen Koordinatensystem?
Mit Gleichung (78) erhalten wir

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = (1, -3, 2) \cdot (0, -2, 0) = 0 + 6 + 0 = 6. \tag{81}$$

Dies ist eine Bestätigung der Forminvarianz des Skalarprodukts: es bleibt unter Rotation des Koordinatensystem unverändert.

9. Das Vektorprodukt $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ aus Rechenbeispiel 7 als Determinante:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{\boldsymbol{y}} - 2\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{82}$$

Andere Koordinatensysteme

Manchmal ist es zweckmäßig, Vektoren in anderen Koordinatensystemen darzustellen. Beispielsweise wird die Position eines Teilchens in sphärischen Polarkoordinaten durch r, θ, φ angegeben. r ist die Länge des Vektors $\boldsymbol{r}$ vom Ursprung zum Ort des Teilchens, θ ist der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und der z-Achse, φ (mit $0 \le \varphi \le \pi$) ist der Winkel zwischen der x-Achse und der Projektion von $\boldsymbol{r}$ auf die xy-Ebene ($r \sin \theta$).

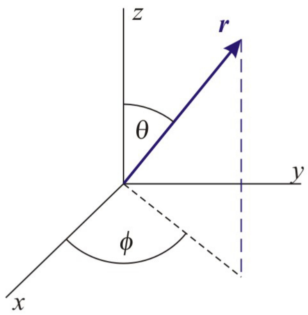

Abb. 23: $\boldsymbol{r}$ in Polarkoordinaten

Die Umrechnung in kartesische Koordinaten erfolgt nach

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \; z = r \cos \theta. \tag{83}$$

Gegeben seien zwei Partikel an den Orten $\boldsymbol{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ und $\boldsymbol{r}_2 = (r_2, \theta_2, \varphi_2)$. θ_{12} sei der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$. Wenn wir das Skalarprodukt $\hat{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_2 = \cos \theta_{12}$ durch $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ ausdrücken, lässt sich unter Verwendung von

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \tag{84}$$

zeigen, dass

$$\cos \theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2. \tag{85}$$

Anhang: Gradient, Divergenz und Rotation

Wir führen einen Vektoroperator ein, *Nablaoperator* genannt (Zeichen: ∇), dessen Komponenten die drei partiellen Differentialoperatoren sind:

$$\textit{Nablaoperator}: \; \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{86}$$

Der Gradient einer sklaren Funktion

Die Anwendung des Nablaoperators auf eine eine skalare Funktion $U(x, y, z)$, also

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) =: \text{grad } U \tag{87}$$

heißt *Gradient* der Funktion U. Er stellt einen Vektor dar, der die Änderung der Funktion U in der Umgebung eines beliebigen Punktes (x_0, y_0, z_0) angibt, d. h. die Richtung, in der man von dem betreffenden Punkt ausgehend die stärkste Änderung der Funktion U erhält.[7]
Ein Beispiel ist die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ als Änderung des skalaren Feldes ϕ (des Potentials). $\boldsymbol{E}$ ist gegeben durch die stärkste (negative) Änderung des Potentials: $\boldsymbol{E} = -\text{ grad } \phi$. Die Feldlinien zeigen stets in Richtung der größten Abnahme des Potentials und stehen senkrecht auf den Äquipotentialflächen.

Gegeben sei ein ortsabhängiger Vektor $\boldsymbol{a}(x, y, z)$, ein *Vektorfeld.* [8] Die Anwendung des Nablaoperators auf ein solches Vektorfeld, letzlich also die Vernüpfung zweier Vektoren, kann auf zwei Arten erfolgen: als Skalarprodukt $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ und als Vektorprodukt $\nabla \times \boldsymbol{a}$.

Die Divergenz eines Vektorfeldes

Das Skalarprodukt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (a_x, a_y, a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =: \text{div } \boldsymbol{a} \tag{88}$$

stellt ein skalares Feld dar und heißt *Divergenz* des Vektorfeldes $\boldsymbol{a}$. Sie gibt Auskunft darüber, ob das Vektorfeld in dem betrachteten Raumgebiet *Quellen* oder *Senken* hat (Divergenz grösser bzw. kleiner als Null.) *Quellenfrei* ist das Feld, wenn in jedem Punkt div $\boldsymbol{a} = 0$ ist.
Für die Region eines elektrischen Feldes, in dem sich keine Quelle oder Senke, d. h. keine Ladung, befindet, gilt div $\boldsymbol{E} = 0$. Existiert eine positive Ladung, so gehen von ihr Feldlinien aus und es ist div $\boldsymbol{E} > 0$, im Falle einer negativen Ladung enden Feldlinien an ihr und es ist div $\boldsymbol{E} < 0$.
Magnetfelder sind wegen der in sich geschlossenen Feldlinien stets quellen- und senkenfrei, es ist also div $\boldsymbol{B} = 0$. Und zwar *immer*, denn es gibt keine magnetischen Monopole.

Die Rotation eines Vektorfeldes

Das Vektorprodukt

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (a_x, a_y, a_z) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y & a_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_y \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_z \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_x & a_y \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) =: \text{rot } \boldsymbol{a},\end{aligned} \tag{89}$$

stellt wiederum ein Vektorfeld dar und heißt *Rotation* des Vektorfeldes $\boldsymbol{a}$.
Ein Beispiel ist das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{G}(x, y, z)$ einer Strömung in einem Kanal. Wegen der Reibung am Kanalufer sind dort die Geschwindigkeitsvektoren kleiner als in der Mitte.

---

[7] Auch ein Gradient: Die dem Bergsteiger vertraute Direttissima weist ihm die Richtung des maximalen Höhengewinns.

[8] Ein Vektorfeld wird beschrieben durch $a_x = f_1(x, y, z)$, $a_y = f_2(x, y, z)$, $a_z = f_2(x, y, z)$.

Kleine, auf dem Wasser schwimmende Scheiben drehen sich, es ist rot $\boldsymbol{G} > 0$ (man spricht hier von einem *Wirbelfeld*). Ähnlich verhält es sich beim Geschwindigkeitsfeld des aus einer Badewanne abfließenden Wassers.
Ein statisches elektrisches Feld z. B. hat keine solchen *Wirbel*: alle Feldlinien entspringen oder enden an Ladungen: rot $\boldsymbol{E} = 0$. Betrachtet man aber z. B. das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes, so erkennt man deutlich die senkrecht zur Stromrichtung stehenden Wirbel des magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$.

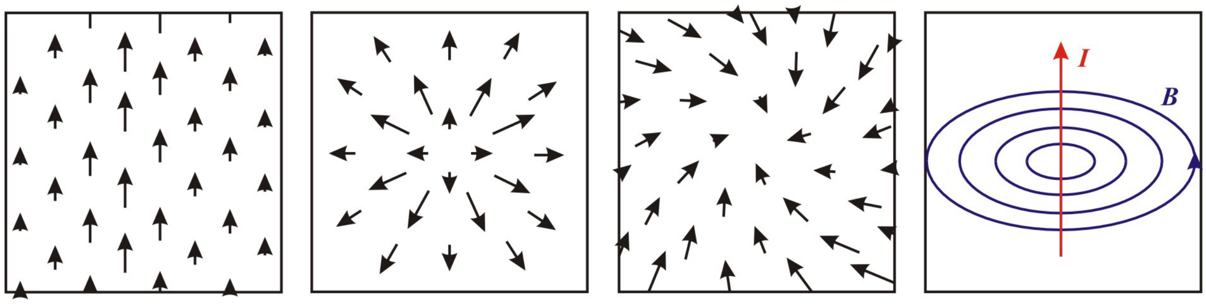

Abb. 24: Links ein quellen- und senkenfreies Feld, div $\boldsymbol{a} = 0$. Daneben eine Quelle, div $\boldsymbol{a} > 0$. An dritter Stelle eine Senke, div $\boldsymbol{a} < 0$. Rechts ein Beispiel für ein Wirbelfeld mit rot $\boldsymbol{B} > 0$.