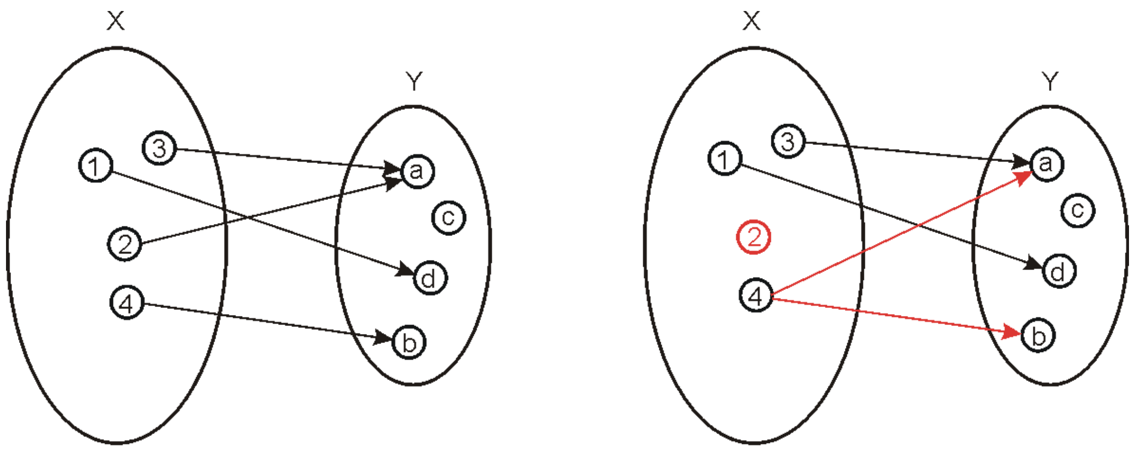
0.3 Abbildungen (Funktionen)

0.3.1 Definitionen

<u>Erste Definition:</u> Seien X, Y Mengen. Eine Vorschrift[1] f, die <u>jedem</u> $x \in X$ <u>genau ein</u> $y \in Y$ zuordnet ($x \to y = f(\mathrm{x})$), heißt *Abbildung* oder *Funktion*[2] von X in Y (f: $X \to Y$)[3].



Links eine Abbildung; rechts ist nicht *jedem* Element von *X* ein Element von *Y* zugeordnet und zweitens gibt es ein Element von *X*, dem *zwei* Elemente von *Y* zugeordnet sind.

X heißt *Definitionsbereich*, *Y* heißt *Bildbereich* oder *Bild*[4].

$y = f(x)$ ist der *Funktionswert* oder *Wert*, den die Funktion *f an der Stelle x* annimmt[5]. Die $x \in X$ heißen *Argumente* von *f* .

Bsp.: g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ ist eine Funktion.

Bsp.: h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-1}$, $x \neq 0$ ist keine Funktion, denn dem Element $0 \in \mathbb{R}$ ist kein Funktionswert zugeordnet.

<u>Zweite Definition:</u> Eine *Funktion* ist eine Relation, in der verschiedene Elemente verschiedene erste Koordinaten haben.

Gleichheit von Abbildungen: Übereinstimmung in Definitionsbereich, Bild und allen Funktionswerten. Der *Graph* der Funktion f: $X \to Y$ ist die Menge $\{(\mathrm{x}; f(x))$ mit $x \in X\} \subset X \times Y$.

0.3.2 Einschränkung; Bilder, Urbilder; Inklusionen

Ist f: $X \to Y$ und $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$ gegeben, so gibt es eine Abbildung

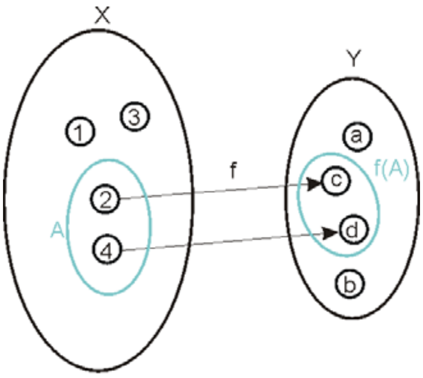
$$A \to Y\,,\, x \mapsto f\,(\mathrm{x}).$$

Diese Abbildung heißt *Einschränkung* $f|_A$ von f auf A. (A nennt man in diesem Fall auch den *eingeschränkten Definitionsbereich.*)

---

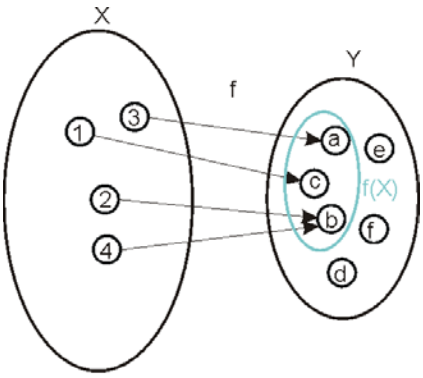
[1] Auch *Funktionsvorschrift*, *Zuordnungsvorschrift*
[2] Auch *Zuordnung*, *Transformation*, *Operator*
[3] $x \to f\,(\mathrm{x})$ ist eine elementeweise, $f: X \to Y$ eine mengenbezogene Darstellung.
[4] Auch *Ziel*, *Zielmenge*, *Wertevorrat*
[5] Oder: "*f* bildet das Element *x* auf das Element *y* ab", oder: "*f* transformiert *x* nach *y*", oder: "*f* ordnet dem Element *x* das Element *y* eindeutig zu".

Ist $A \subset X$, so heißt $f(\mathrm{A}) := \{f(x);\, x \in A\}$ das Bild von A unter f .



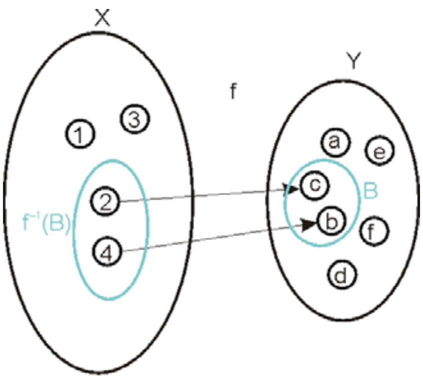
Das Bild von *A* unter *f*

Speziell heißt das Bild von X, $f(X)$, der *Wertevorrat* von f.



Der Wertevorrat *f(X)*

Sei $f\colon X \to Y$. Ist $A \subset X$ und $B \subset Y$, so heißt $\bar{f}^{\,1}\,(B) := \{a \in A;\, f(\mathrm{x}) \in B\}$ das *Urbild* von B unter f („f oben minus 1 von B“).



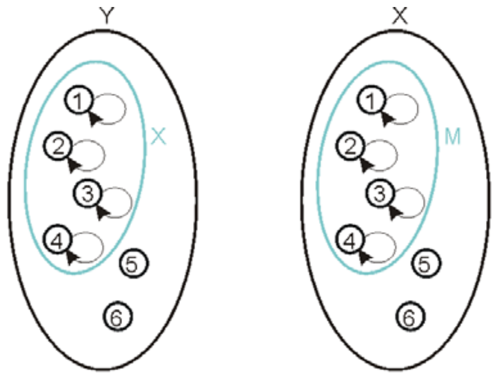
Das Urbild von *B* unter *f*

Inklusion und identische Abbildung

Gegeben sei $f\colon X \to Y$, wobei $X \subset Y$. Gilt $f(x) = x$ für alle $x \in X$, so spricht man von einer *Inklusionsabbildung* oder *Einbettung* oder *kanonischen Injektion* von X in Y.

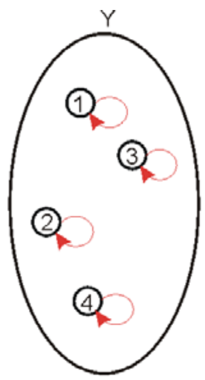
Andere Formulierung: Sei $M \subset X$. Liegt eine Funktion $\mathrm{i}_M(x)$: $M \to X$ mit $\mathrm{i}_M(x) = x$ für alle $x \in M$ vor, so spricht man von einer *Inklusionsabbildung* oder *Einbettung* oder *kanonischen Injektion* von M in X :

$$\mathrm{i}_M: M \to X \,,\; \mathrm{i}_M(x) = \mathrm{x} \,.$$



Zu den beiden die Inklusion betreffenden Formulierungen

Ist insbesondere $X = Y$ und $f(\mathrm{x}) = x$ für alle $x \in X$, handelt es sich um eine Inklusionsabbildung von X in X ; es ist die (bijektive, s. u.) *identische Abbildung* id_X: $X \to X$ mit $\mathrm{id}_X(x) = x$.



Die identische Abbildung

Die kanonische Injektion von M in X (vorletzte Figur rechts) kann auch als $\mathrm{id}\,|_M$, als Einschränkung von id_X auf M angesehen werden.

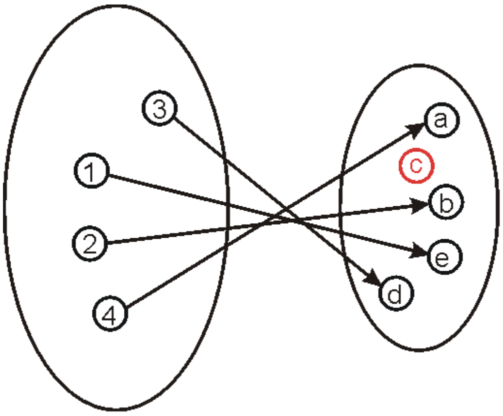
0.3.3 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Eine Abbildung f: $X \to Y$ heißt

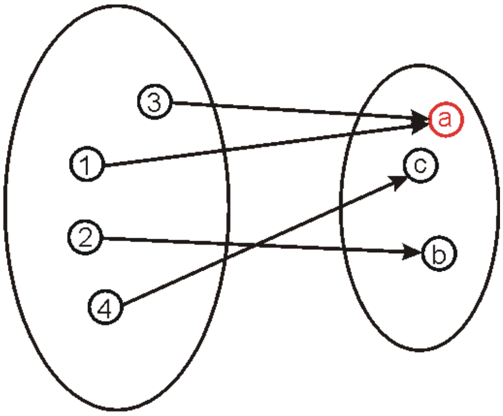
- *surjektiv*, wenn jedes Element von Y auch wirklich als Bild auftritt (eine Abbildung von X *auf* die Menge Y)
- *injektiv*, wenn verschiedene $x \in X$, z. B. x_1 und x_2 (mit $x_1 \neq x_2$) auch verschiedene Funktionswerte $y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2)$ haben (auch *eineindeutige* Abbildung)
- *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist (auch umkehrbar eindeutige Abbildung)

Andere Formulierung: f: $X \to Y$ heißt

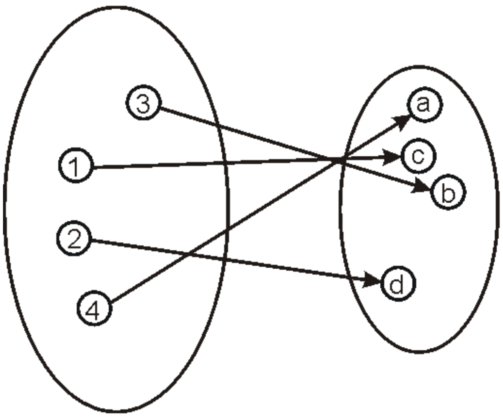
- *surjektiv*: $\Leftrightarrow$ Zu jedem $y \in Y$ gibt es mindestens ein $x \in X$ mit $y = f\,(\mathrm{x})$
- *injektiv*: $\Leftrightarrow$ Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



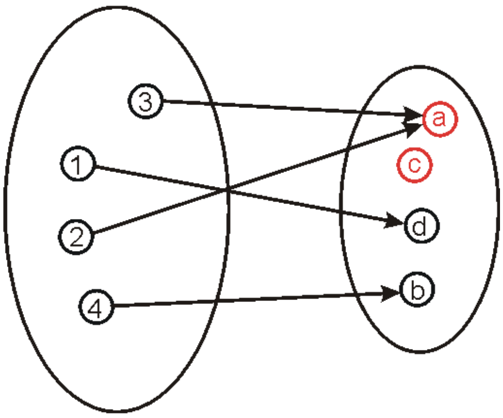
Injektiv, nicht surjektiv



Surjektiv, nicht injektiv



Bijektiv



Weder injektiv noch surjektiv

Für den *Ich-kann-injektiv-und-surjektiv-nicht-auseinander-halten*-Club:
s**ur**jektiv bedeutet, daß es immer ein **Ur**bild gibt