

0.2 Mengen

Zum Brückenkurs Mathematik, Quelle: Hauptsächlich Lindner, H.: Mengenalgebra. Stuttgart 1965

1	Eigenschaften von Mengen	2
1.1	Eine Menge besteht aus Elementen.....	2
1.2	Endliche und unendliche Mengen	2
1.3	Schreibweisen für Mengen.....	2
1.4	Die leere Menge	3
1.5	Beziehungen zwischen Mengen	4
	Die Gleichheit von Mengen	4
	Die Teilmengenbeziehung und die Potenzmenge	4
1.6	Elementefremde Mengen	5
2	Operationen mit Mengen.....	5
2.1	Die Vereinigung von Mengen	5
2.2	Der Durchschnitt von Mengen	6
2.3	Die Differenz zweier Mengen	6
2.4	Die Ergänzungsmenge (Komplementärmenge)	6
3	Klassen, Venn-Diagramme	7
3.1	Die Aufteilung einer Menge, Klasseneinteilung	7
3.2	Mengenbilder	7
	Das Dualitätsprinzip.....	7
	Die Russelsche Antinomie	8

1 Eigenschaften von Mengen

1.1 Eine Menge besteht aus Elementen

Eine *Menge* ist gegeben, wenn eindeutig feststeht, aus welchen *Elementen* sie besteht. So bilden alle (zu einem bestimmten Zeitpunkt) in Indien lebenden Elefanten eine Menge. Aber auch die Monate eines Jahres bilden eine Menge. Aus diesen beiden Beispielen ist ersichtlich, daß die Elemente einer Menge *Dinge* (z. B. Elefanten) oder *Begriffe* (z. B. Kalendermonate) sein können.

Zwischen einer bestimmten Menge A und einem Element a gilt genau eine von zwei Beziehungen:

- (1) a ist ein Element der Menge A , in Zeichen: $a \in A$, oder
- (2) a ist nicht Element der Menge A , in Zeichen: $a \notin A$.

Beispiele: \mathbb{N} ist die Menge der natürlichen Zahlen. Dann gilt:

$15 \in \mathbb{N}$ ("15 gehört zu \mathbb{N} " oder "15 ist Element von \mathbb{N} ") und
 $\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$ (" $\frac{3}{4}$ gehört nicht zu \mathbb{N} " oder " $\frac{3}{4}$ ist kein Element von \mathbb{N} ").

1.2 Endliche und unendliche Mengen

Wenn man die Elemente einer Menge abzuzählen (zu numerieren) versucht, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man kommt bei dieser Abzählung einmal an ein Ende oder
2. man findet immer noch Elemente, die nicht bereits gezählt sind.

Im ersten Fall ist die Anzahl der Elemente *endlich*, man nennt dann auch die Menge selbst *endlich*. Im anderen Fall ist die Zahl der Elemente *nichtendlich*¹ und man nennt auch die Menge selbst *nichtendlich* oder *unendlich*.

Die Menge der Sandkörner in einem Eimer ist endlich. Zwar ist die Abzählung sehr langwierig, aber wir können uns zumindest vorstellen, daß wir bei einer solchen Abzählung irgendwann einmal an ein Ende kommen. Ähnliches gilt für die Abzählung der Elefanten in Indien oder die Anzahl der Elementarteilchen im Universum. Mengen von Dingen sind stets endlich. Mengen von mathematischen Begriffen sind oft nichtendlich. Beispiele hierfür sind die Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} . Aber auch die Menge aller Kreise mit demselben Mittelpunkt ist nichtendlich.

1.3 Schreibweisen für Mengen

Bei Mengen mit wenigen Elementen kann man einfach die Elemente nennen. Dieses "Verzeichnis" der Elemente wird in geschweifte Klammern eingeschlossen, die einzelnen Elemente werden durch Kommata getrennt, z. B.

$\{1, 8, 27, 64, 125, 216\}$.

Dies ist die Menge der ersten sechs Kubikzahlen.

¹ Schreibweisen wie *nichtendlich*, *nichtleer* etc. (in einem Wort) sind in der Mathematik üblich.

Diese *aufzählende Form* der Mengenbildung ist uns vertraut: die Schülerliste im Klassenbuch, das Telefonbuch, jede Kartei stellt Elemente zu einer Menge zusammen. Im Alltagsleben bevorzugt man meist eine bestimmte Anordnung der Elemente, z. B. die alphabetische Ordnung. In der Mathematik hat man festgesetzt, daß es auf die Reihenfolge der Elemente *nicht* ankommen soll, also

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}.$$

Auch braucht jedes Element nur einmal angeführt zu werden. Die Menge

$$\{36, 2 \cdot 18, 28 + 8, 108 : 3, 40 - 4, 6^2\}$$

kann vereinfacht geschrieben werden als

$$\{36, 36, 36, 36, 36, 36\} = \{36\}.$$

Eine Menge, die nur aus einem Element besteht, nennen wir *Eingliedmenge*. Weil 36 (das einzige) Element der Menge dieses Beispiels ist, dürfen wir schreiben

$$36 \in \{36\}.$$

Falsch dagegen ist die Schreibweise $36 = \{36\}$!

Eine zweite Art, Mengen zu bilden, ist die *beschreibende Form*. Dazu brauchen wir eine *beschreibende Eigenschaft* (Bedingung, Aussageform) und das *Mengenbildungszeichen* $\{x \mid \dots\}$. Letzteres wird gelesen als "*die Menge aller x, für die gilt:*". Dann folgt die Bedingung, die x erfüllen muß, z. B. x ist Schüler unserer Klasse. Es ist gleichgültig, ob wir als Platzhalter für die Elemente x oder einen anderen Buchstaben wählen, es ist also

$$\{x \mid x \text{ ist Schüler unserer Klasse}\} = \{y \mid y \text{ ist Schüler unserer Klasse}\}.$$

Die beschreibende Eigenschaft kann auch durch eine Gleichung wie $x + 3 = 5$ oder eine Ungleichung wie $x \geq 11$ angegeben sein.

Manchmal kann man eine Menge gleich gut in beiden Formen angeben. Beispiele hierfür sind:

$$\begin{aligned} \{x \mid x + 3 = 5\}_{\mathbb{N}} &= \{2\} && \text{(eine Eingliedmenge)} \\ \{x \mid x \geq 11\}_{\mathbb{N}} &= \{11, 12, 13, 14, \dots\} && \text{(eine nichtendliche Menge)} \\ \{x \mid 2 \leq x < 7\}_{\mathbb{N}} &= \{2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

Bei der beschreibenden Form gibt man die Grundmenge (s. u.) meist dadurch an, daß man ihr Symbol als Index an die abschließende Mengenklammer setzt.

1.4 Die leere Menge

Es ist zweckmäßig, auch eine *leere Menge* zu bilden, zu der kein Element gehört. Ein Beispiel für eine leere Menge ist die Menge aller Menschen mit zwei Nasen. Man schreibt

$$\{ \} \text{ oder } \emptyset.$$

Die leere Menge wird nach Vereinbarung zu den endlichen Mengen gezählt. Gelegentlich wird die leere Menge auch *Nullmenge* genannt.

1.5 Beziehungen zwischen Mengen

Die Gleichheit von Mengen

Die Zahl "sieben" kann man auf verschiedene Weise bezeichnen, als 7 oder als $3 + 4$, $\sqrt{49}$, $91 : 13$ usw. Jede dieser Schreibweisen meint dasselbe mathematische Objekt. Wir schreiben daher

$$3 + 4 = \sqrt{49} = 91 : 13 = 7.$$

Man kann die Gleichheit von Mengen festlegen:

Zwei Mengen A und B heißen dann und nur dann gleich, wenn jedes Element von A auch zu B gehört und wenn jedes Element von B auch zu A gehört.

Diese Gleichheit von Mengen erfüllt dieselben Gesetze wie die Gleichheit von Zahlen, nämlich:

- a) Reflexivität: $A = A$
- b) Symmetrie: Wenn $A = B$ ist, so ist $B = A$.
- c) Transitivität: Wenn $A = B$ und $B = C$ ist, so ist $A = C$.

Wenn wir die Ungleichheit zweier Mengen, also $A \neq B$, nachweisen wollen, müssen wir mindestens ein Element finden, das zur einen, aber nicht zur anderen Menge gehört.

Die Teilmengenbeziehung und die Potenzmenge

Eine Menge A heißt genau dann *Teilmenge* einer Menge B , in Zeichen $A \subset B$, wenn jedes Element von A auch zu B gehört. Gibt es dagegen ein Element von A , das nicht zu B gehört, dann ist A *nicht* Teilmenge von B , in Zeichen $A \not\subset B$ ².

Beispiele: Die Menge

$$A = \{2, 5, 11, 97\}$$

ist eine Teilmenge der Menge der Primzahlen \mathbb{P} , also $A \subset \mathbb{P}$. Die Menge

$$B = \{2, 5, 6, 11, 13\}$$

ist nicht Teilmenge der Primzahlen \mathbb{P} , also $B \not\subset \mathbb{P}$, weil $6 \in B$, aber $6 \notin \mathbb{P}$ ist.

Die Teilmengenbeziehung ist transitiv: Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$ ist, so ist $A \subset C$.

Aus der Definition der Teilmenge folgt, daß jede Menge Teilmenge von sich selbst ist: Wählen wir aus der Menge $A = \{a, b, c\}$ eine Teilmenge mit den Elementen a, b , und c aus, erhal-

² Ist $A \subset B$, so nennt man B auch *Obermenge* von A .

ten wir wieder die Menge A . Es gilt also immer $A \subset A$ und man sagt, daß A sei eine *unechte* Teilmenge von A .

Die leere Menge ist vereinbarungsgemäß Teilmenge einer jeden Menge: $\{\} \subset A$. Damit ist sie auch Teilmenge von sich selbst: $\{\} \subset \{\}$. Daraus folgt $\{\} = \{\} = \dots = \{\}$, also sind alle leeren Mengen einander gleich, d. h. es gibt nur *eine* leere Menge.

Eine Menge A ist genau dann *echte* Teilmenge von B , wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$(1) A \subset B \quad (2) A \neq B \quad (3) A \neq \{\}$$

Dann und nur dann ist $A \subset B$ und zugleich $B \subset A$, wenn $A = B$ ist. Dies folgt aus der Definition der Gleichheit zweier Mengen. Wir hatten nämlich festgelegt: $A = B$ dann und nur dann, wenn

1. jedes Element von A zu B gehört (dann ist aber $A \subset B$) und
2. jedes Element von B zu A gehört (dann ist aber $B \subset A$).

Eine (endliche) Menge mit n Elementen hat einschließlich der beiden unechten Teilmengen stets 2^n Teilmengen. Beispiel: die Menge $\{a, b, c\}$ hat folgende $2^3 = 8$ Teilmengen:

$$\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\}.$$

Die Menge aller Teilmengen einer Menge A heißt *Potenzmenge* von A , $\mathbf{P}(A)$.

$$\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\}\}$$

ist die Potenzmenge von $\{a, b, c\}$.

1.6 Elementefremde Mengen

Zwei Mengen heißen genau dann *fremd zueinander*, *elementefremd* oder *disjunkt*, wenn sie kein gemeinsames Element haben; oder: Aus $a \in A$ folgt stets $a \notin B$ für alle a . Elementefremd sind z. B. die Mengen $\{5, 8, 9\}$ und $\{6, 7, 10\}$ oder die Menge der geraden Zahlen zur Menge der ungeraden Zahlen.

2 Operationen mit Mengen

Zahlen kann man durch die vier Grundrechnungsarten miteinander verknüpfen. Man kann auch mit Mengen rechnen, das heißt, Mengen durch geeignete Operationen verknüpfen.

2.1 Die Vereinigung von Mengen

Wenn die Fußball- und die Handballmannschaft unserer Schule zusammenkommt, dann ist dies eine Vereinigung zweier Mengen. Peter, der in beiden Mannschaften mitspielt, gehört selbstverständlich auch zu dieser Vereinigungsmenge.

Die Vereinigung zweier Mengen A und B , geschrieben $A \cup B$ und gelesen "A vereinigt mit B", ist definiert als die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören, also die, die mindestens zu einer der beiden Mengen gehören.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Hier ist "oder" im nicht ausschließenden Sinn gebraucht.

2.2 Der Durchschnitt von Mengen

Wir betrachten die Menge aller roten Blumen und die Menge aller Rosen. Beiden Mengen gemeinsam sind die roten Rosen.

Der *Durchschnitt* oder die *Schnittmenge* zweier Mengen A und B , geschrieben $A \cap B$ und gelesen "A geschnitten mit B", ist definiert als die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören, also die, die beiden Mengen gemeinsam sind).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Hier ist "und" im Sinne von "sowohl... als auch..." gebraucht. (Ist der Durchschnitt zweier Mengen leer, so sind sie disjunkt.)

2.3 Die Differenz zweier Mengen

Die Differenz zweier Mengen, geschrieben $A - B$ oder $A \setminus B$ und gelesen "A minus B", ist definiert als die Menge aller Elemente, die zu A , nicht aber zu B gehören.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Beispiele: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, $B \setminus A = \{6, 7\}$.

2.4 Die Ergänzungsmenge (Komplementärmenge)

Ein Sonderfall der Mengendifferenz ist die *Ergänzungsmenge* oder das *Komplement*.

Gegeben sei die Menge A , eine Teilmenge der Grundmenge G . Dann ist die *Ergänzungsmenge* oder das *Komplement* A' von A bezüglich G definiert als die Menge aller Elemente von G , die nicht zu A gehören.³

$$A' = \{x \mid x \in G \text{ und } x \notin A\} \text{ mit } A \subset G$$

Oder $A' = G \setminus A$ mit $A \subset G$.

(Statt "Komplement von A bezüglich G " sagt man auch "Komplement von A in G ")

³ Schreibweisen für A' sind auch \bar{A} , $C_G A$ oder A^c

3 Klassen, Venn-Diagramme

3.1 Die Aufteilung einer Menge, Klasseneinteilung

Die Schüler einer Klasse können auf verschiedene Weise (in Teilmengen) aufgeteilt werden, z. B. nach dem Glaubensbekenntnis, nach den Mathematiknoten, nach der Tischreihe, in der sie sitzen.

Eine Menge G heißt genau dann in die Mengen A, B, C, \dots aufgeteilt, wenn

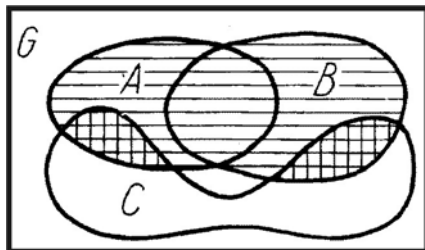
- (1) keine der Mengen leer ist,
- (2) A, B, C, \dots fremd zueinander sind und
- (3) $A \cup B \cup C \cup \dots = G$ ist.

Wenn A eine echte Teilmenge von G ist, dann bilden A und A' eine Aufteilung von G in zwei Mengen.

Die Aufteilung einer Menge nennt man oft eine *Klasseneinteilung* der Elemente dieser Menge. So ist z. B. die Menge aller Schüler einer Schule in Klassen eingeteilt. Jeder Schüler gehört genau zu einer Klasse. Da keine Klasse leer ist, sind obige Bedingungen (1) bis (3) erfüllt.

3.2 Mengenbilder

Mengenbilder (*Venn-Diagramme*) dienen zur Veranschaulichung der Beziehung zwischen Mengen, haben aber mathematisch keinerlei Beweiskraft. Die Grundmenge G wird in der Regel als Rechteck gezeichnet, die übrigen Mengen (in diesem Rechteck) als beliebig begrenzte Flächen. Den Elementen der Menge entsprechen Punkte der Zeichenebene. Flächen, die man besonders kennzeichnen will, werden schraffiert.



In diesem Mengenbild ist eines der beiden Distributivgesetze veranschaulicht, nämlich

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B).$$

Das Dualitätsprinzip

Das *Dualitätsprinzip* besagt, daß man aus einer gültigen Aussage eine zweite gültige Aussage erhält, wenn man folgende Regeln anwendet:

- (1) Es sind an allen Stellen die Zeichen \cup und \cap miteinander zu vertauschen.
- (2) Tritt eine Teilmengenbeziehung $A \subset B$ auf, ist die umgekehrte Beziehung $B \subset A$ zu bilden.

- (3) Wenn die leere Menge $\{ \}$ oder die Grundmenge G auftreten, sind sie jeweils zu vertauschen.

Beispiele:

- (1) Gilt $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, so gilt auch $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
(2) Aus $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ ergibt sich $A \cup B \Leftrightarrow B \subset A$.
(3) Gilt $A \cup \{ \} = A$, so gilt auch $A \cap \{ \} = \{ \}$.
Aus $A \cap A' = \{ \}$ ergibt sich $A \cup A' = G$.

Das Dualitätsprinzip bewirkt einen "symmetrischen" Aufbau der Mengenalgebra.

Die Russelsche Antinomie

Vorbemerkung

Es gibt Mengen, die sich nicht selbst enthalten, d. h. nicht Element von sich selbst sind.

Bsp. 1: Die Menge der reellen Zahlen.

Diese Menge ist keine reelle Zahl, also kein Element von sich selbst.

Bsp. 2: Die Menge $\{5\}$.

5 ist ein Element der Menge, und zwar das einzige. Schon deswegen kann nichts anderes in ihr enthalten sein, insbesondere nicht eine Menge $\{5\}$.

Es gibt Mengen, die Element von sich selbst sind.

Bsp. 3: Die Menge aller Dinge außer 5.

Da diese Menge so gut wie alles enthält, enthält sie auch sich selbst.

Bsp. 4: Die Menge aller Mengen.

Da diese Menge nun wirklich *alle* Mengen, muß sie sich auch selbst enthalten.

Widerspruch

Sei M die Menge aller Mengen X , die nicht Element von sich selbst sind:

$$M = \{X \mid X \text{ ist Menge und } X \notin X\}.$$

Enthält M sich selbst, d. h. gilt $M \in M$ oder $M \notin M$?

Angenommen, $M \in M$ sei richtig. Dann gehört aber M nach Definition nicht zu M , d. h. $M \notin M$. Also ist die Annahme $M \in M$ falsch.

Dann muß wohl $M \notin M$ richtig sein. Aber dann gehört es zu den $X \mid X \notin X$, ist also Element von sich selbst, also $M \in M$.

Die Bildung von Mengen, die durch ihre Elemente vollständig beschrieben sind, kann zu Widersprüchen führen, d. h. die Cantorsche Mengenlehre ist nicht widerspruchsfrei.

* Relationen

Ergänzungen zum Brückenkurs Mathematik, Kapitel 0.2 und 0.3

Quellen: Hauptsächlich Kössler, F.: Grundlagen der Relationen. Stuttgart 1969 und Kuropatwa, O.: Besondere Eigenschaften von Relationen, Stuttgart 1970; Basieux, P.: Die Architektur der Mathematik. Denken in Strukturen, Reinbek ² 2004

1 Aussage und Aussageform; Grund- und Lösungsmenge	2
1.1 Aussagen und Aussageformen	2
1.2 Die Grundmenge	2
1.3 Die Lösungsmenge	2
2 Das kartesische Produkt	3
2.1 Geordnete Paare und Paarmengen.....	3
2.2 Das kartesische Produkt	3
3 Relationen.....	4
3.1 Aussageformen und Relationen	4
3.2 Vor- und Nachbereich einer Relation, Pfeildiagramme	4
4 Intermezzo: Aus "Die Architektur der Mathematik" von P. Basieux	5
5 Eigenschaften von Relationen.....	5
5.1 Transitiv Relationen	5
5.2 Reflexive und antireflexive Relationen.....	6
5.3 Die Identitätsrelation	6
5.4 Symmetrische, asymmetrische und identitive Relationen.....	6
5.5 Ordnungen und Äquivalenzen.....	7

1 Aussage und Aussageform; Grund- und Lösungsmenge

1.1 Aussagen und Aussageformen

Sätze, deren Richtigkeit von niemandem, der die nötige Sachkenntnis besitzt, geleugnet werden können, heißen *richtige* oder *wahre Aussagen*. Sätze, deren Unrichtigkeit nicht geleugnet werden können, heißen *falsche Aussagen*.

Beispiele: $3 - 6 + 17 = 14$ ist eine wahre Aussage, $29 < 8$ ist eine falsche Aussage.

Ein Satz mit einer oder mehreren Leerstellen heißt *Aussageform*, wenn durch Einsetzungen in die Leerstelle(n) wahre oder falsche Aussagen entstehen können¹. Die Aussageform selbst ist weder wahr noch falsch.

Beispiel: $32 - 17 = x$ ist eine Aussageform mit der Leerstelle x . Setzt man z. B. 5 für x ein, so entsteht eine falsche Aussage, durch Einsetzen von 15 für x dagegen eine wahre Aussage.

1.2 Die Grundmenge

Dem Sinn der Aussageform "x ist ein Säugetier" entspricht es, wenn für die Variable x der Name eines Tieres eingesetzt wird. Die Einsetzung *der Kölner Dom* führt nicht zu einer Aussage, sondern zu dem Satz "Der Kölner Dom ist ein Säugetier". Die Menge der sinnvoll einsetzbaren Elemente heißt *Grundmenge* der betreffenden Aussageform. *Jedes* Element der Grundmenge ergänzt die Aussageform zu einer wahren oder falschen Aussage.

Zu einer bestimmten Aussageform gibt es in der Regel mehrere Grundmengen: für $x < 100$ sind z. B. $A = \{1, 15, 150, 200\}$ oder $B = \{-2, 1, 0, 1\}$ mögliche Grundmengen.

1.3 Die Lösungsmenge

Lösung einer Aussageform heißt jedes Element der zugehörigen Grundmenge, dessen Einsetzung in die Aussageform zu einer wahren Aussage führt. Alle Elemente der Grundmenge, die Lösungen der Aussageform sind, bilden zusammen die *Lösungsmenge* der Aussageform hinsichtlich der zugehörigen Grundmenge. (Die Lösungsmenge einer Aussageform ist also stets eine Teilmenge der zugehörigen Grundmenge.)

Beispiel: Für die Aussageform

$$x < 11$$

sei $G = \{1, 5, 15, 20\}$ eine Grundmenge. Die zugehörige Lösungsmenge ist $L = \{1, 5\}$. Ist hingegen $G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, heißt die Lösungsmenge $L = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Bemerkung: Die Lösungsmenge kann auch eine uneigentliche Teilmenge von G sein, also $L = \{ \}$ oder $L = G$. Im ersten Fall heißt die Aussageform *unlösbar* in G , im zweiten Fall *allgemeingültig* in G .

¹ Aussageformen mit zwei Leerstellen heißen *zweistellige* Aussageformen (s. u.).

2 Das kartesische Produkt

2.1 Geordnete Paare und Paarmengen

Gegeben seien zwei Mengen A und B (wobei diese nicht notwendig verschieden sein müssen). Ein *geordnetes Paar* (oder kurz: ein *Paar*) $(x; y)$ besteht aus zwei Elementen $x \in A$ und $y \in B$. x heißt *erste Koordinate*, y heißt *zweite Koordinate* des Paares $(x; y)$.

Vertauscht man in einem geordneten Paar die Reihenfolge der beiden Koordinaten, so entsteht in der Regel ein anderes geordnetes Paar.

- Zwei geordnete Paare $(a; b)$ und $(c; d)$ sind dann und nur dann *gleich*, wenn $a = c$ und $b = d$ ist.

Eine Menge, die nur geordnete Paare als Elemente enthält, heißt *Paarmenge*.

Beispiel: $M = \{(3; 4), (5; 6), (1; 2), (1; 4)\}$ ist eine Paarmenge mit vier Elementen.

2.2 Das kartesische Produkt

Das *kartesische Produkt* (oder die *Produktmenge*) $A \times B$ der beiden Mengen A und B ist diejenige Paarmenge, zu der nur solche Elemente gehören, deren erste Koordinate zu A und deren zweite Koordinate zu B gehört. Es enthält darüber hinaus aber auch *alle* solche geordneten Paare, die sich aus A und B bilden lassen.

Beispiel: Es sei $A = \{a, b\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$; dann ist:

$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$$

Die beschreibende Form ist:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Die Tafelformen für die Produkte $A \times B$ und $B \times A$ der Ausgangsmengen $A = \{a, b\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$ sind

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (a; 1) & (a; 2) & (a; 3) \\ (b; 1) & (b; 2) & (b; 3) \end{Bmatrix}, \quad B \times A = \begin{Bmatrix} (1; a) & (1; b) \\ (2; a) & (2; b) \\ (3; a) & (3; b) \end{Bmatrix}.$$

In der Tafelform stehen alle Paare mit derselben ersten Koordinate in derselben Zeile, alle geordneten Paare mit derselben zweiten Koordinate stehen in derselben Spalte. Die Tafelform enthält so viele Zeilen, wie Elemente zur ersten Ausgangsmenge gehören. Die Zahl der Spalten stimmt mit der Anzahl der Elemente in der zweiten Ausgangsmenge überein.

Ist $A \neq B$, gilt $A \times B \neq B \times A$, das kartesische Produkt ist also nicht kommutativ. (Nur dann, wenn $A = B$ ist, gilt $A \times B = B \times A$.)

Anders als beim Produkt zweier Zahlen, das selbst wieder eine Zahl ist, sind die Elemente eines kartesischen Produkts von anderer Art als die Elemente der beiden Ausgangsmengen. Sind die Elemente der beiden Ausgangsmengen natürliche Zahlen, so sind die Elemente der Produktmenge geordnete Zahlenpaare mit natürlichen Zahlen als Koordinaten.

3 Relationen

3.1 Aussageformen und Relationen

Es sei $A = \{1, 2, 5\}$ und $B = \{2, 3\}$. Für $x \in A$ und $y \in B$ sei die Aussageform

$$x < y$$

gegeben. Die Grundmenge einer jeden zweistelligen Aussageform ist eine Paarmenge, hier das kartesische Produkt $A \times B$. Die Elemente von A und B werden durch die Aussageform in eine bestimmte Beziehung, eine Relation, zueinander gesetzt.

Bei einer Teilmenge $R \subseteq A \times B$, nämlich bei $\{(1; 2), (1; 3), (2; 3)\}$ ist die durch die Aussageform vorgegebene Relation erfüllt. Daher bezeichnet man auch diese Teilmenge mit dem Begriff *Relation*. Sie bestimmt eindeutig die Menge aller $(x; y)$, bei denen die erste Koordinate x zur zweiten y gerade in der betreffenden Beziehung steht. Man spricht hier auch von einer *Relation über $A \times B$* .

(Die zweistellige Aussageform schreibt vor, auf welche Weise das, was in die ersten und zweiten Leerstellen eingesetzt wird, in Relation zueinander steht. Deswegen heißt eine zweistellige Aussageform auch *Relationsvorschrift*.)

Übrigens stellen auch die Elemente $(2; 2)$, $(5; 2)$ und $(5; 3)$ aus $A \times B$ eine Relation dar, aber eine andere als die durch $x < y$ vorgegebene. Dies berechtigt zu der Aussage, daß *jede* Teilmenge der Grundmenge eine Relation ist. Deshalb gilt:

In der beschreibenden Form einer Relation sind die sowohl Relationsvorschrift als auch die Grundmenge unentbehrliche Bestandteile.

Ist $A = B =: M$, so heißt eine Relation über $M \times M$ eine *Relation in M* .

Beispiele: $R = \{(x; y) \mid x + y = 6\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

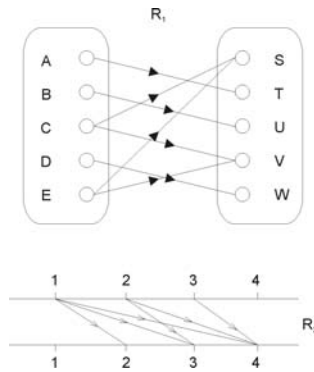
$R = \{(x; y) \mid x \text{ und } y \text{ haben einen gemeinsamen Teiler } \neq 1\}_{M \times M}$ ist eine Relation in $M = \{2, 6, 9\}$.

3.2 Vor- und Nachbereich einer Relation, Pfeildiagramme

Die ersten Koordinaten aller geordneten Paare einer Relation bilden eine Menge, die *Vorbereich V* der Relation genannt wird. Die zweiten Koordinaten aller Paare einer Relation bilden eine Menge N , die der *Nachbereich* der Relation heißt.

Beispiel: $M = \{(a; 1), (b; 2), (c; 3), (d; 4)\}$, $V = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

Endliche Relationen mit beliebigen Koordinaten werden häufig durch Pfeildiagramme dargestellt. Jeder Pfeil zeigt ein geordnetes Paar an. Der Anfangspunkt eines Pfeils ist das Bild der ersten Koordinate und der Zielpunkt das Bild der zweiten Koordinate des geordneten Paares.
Beispiele:



$$R_1 = \{(A; T), (B; U), (C; S), (C; V), (D; W), (E; S), (E; V)\}$$

$$R_2 = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$$

4 Intermezzo: Aus "Die Architektur der Mathematik" von P. Basieux

Jede Relation bestimmt eindeutig die Menge aller derjenigen geordneten Paare $(x; y)$, bei welchen die erste Koordinate x zur zweiten Koordinate y gerade in der betreffenden Relation steht...

Man definiert Relationen einfach durch die entsprechende Menge: Eine *Relation* ist eine Menge geordneter Paare und eine Menge R demnach dann eine Relation, wenn jedes Element von R ein geordnetes Paar ist, das heißt, wenn aus $z \in R$ stets die Existenz von x und y mit $z = (x; y)$ folgt, wobei x und y Elemente einer Menge M sind. Da einerseits das kartesische Produkt $M \times M$ die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus M darstellt und andererseits die Menge R diejenigen geordneten Paare, bei welchen die erste Koordinate zur zweiten gerade in der betreffenden Relation steht, ist R nur eine spezielle Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times M$:

$$R \subseteq M \times M$$

Die kleinste Relation in M ist die leere Menge \emptyset und die größte das kartesische Produkt $M \times M$.

Ist R eine Relation, so ist es üblich, für den Sachverhalt $(x; y) \in R$ auch kurz $x R y$ zu schreiben und wie in der Umgangssprache zu sagen, daß x in der Relation R zu y steht.

Beispiele für diese Schreibweise (Ausgangsmenge sei bei den Personenbeispielen die Menge der Einwohner einer Stadt):

- (a) V sei die Vater-Kind-Relation. Dann bedeutet $a V b$, daß a der Vater von b ist.
- (b) G sei die Geschwister-Beziehung, dann bedeutet $s G t$, das s und t Geschwister sind.
- (c) Das Zeichen " \angle " bezeichnet eine lexikographische Ordnungsrelation. $a \angle b$ heißt: a steht alphabetisch vor b .
- (d) Die Relation sei die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Berufsgruppe, z. B. kann $a L b$ bedeuten " a und b sind Lehrer"
- e) "Geschäftsrelation" K : $a K b$ kann bedeuten: " a ist Kunde von b ".

5 Eigenschaften von Relationen

5.1 Transitiv Relationen

Eine Relation R in einer Menge M heißt *transitiv*, wenn aus $a R b$ und $b R c$ stets $a R c$ folgt.

Beispiel: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und " $<$ " die Relation "kleiner". Mit $a < b$ und $b < c$ gilt $a < c$.

5.2 Reflexive und antireflexive Relationen

Eine Relation in einer Menge M heißt *reflexiv*, wenn für alle $x \in M$ auch $x R x$, also $(x; x) \in R$ gilt:

$$x \in M \Rightarrow (x; x) \in R$$

Beispiele 1: Die Relation

$$T = \{(x; y) \mid x \text{ ist Teiler von } y\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

ist eine reflexive Relation. Da "x ist Teiler von x" ($x T x$) für alle $x \in \mathbb{N}$ zu wahren Aussagen führt, sind alle Paare Elemente der Relation:

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x; x) \in T.$$

Beispiel 2: Die Relation

$$P = \{(2; 1); (1; 1), (3; 2), (3; 1), (1; 3), (3; 3)\}$$

ist in der Menge $U = \{1, 2, 3\}$ nicht reflexiv. Aus $1 \in U$ folgt zwar $(1; 1) \in P$, ebenso folgt aus $3 \in U$ auch $(3; 3) \in P$. Wäre P reflexiv, müßte auch $2 \in U \Rightarrow (2; 2) \in P$ gelten, dies ist aber nicht der Fall.

Ob eine Relation reflexiv oder nicht reflexiv ist, läßt sich im allgemeinen nur bei bekannter Ausgangsmenge überprüfen.

Beispiel 3: Ist $R = \{(a; b), (a; a), (b; b)\}$ reflexiv?

Ist R eine Relation in $M_1 = \{a, b\}$, so ist R reflexiv. Ist R aber eine Relation in $M_2 = \{a, b, c\}$, dann ist R wegen c nicht reflexiv.

Antireflexiv heißt eine Relation R in einer Menge M , wenn für *kein* Element $x \in M$ die Beziehung $x R x$ gilt.

Beispiel: Die Vater-Kind-Relation $a V b$ (a ist Vater von b) mit $a, b \in M$ ist sicher antireflexiv, da niemand sein eigener Vater ist.

5.3 Die Identitätsrelation

Die *Identitäts-* oder *Gleichheitsrelation* beschreibt die Gleichheit eines jeden Elements jeder beliebigen Menge M mit sich selbst und besteht *allen* identischen Paaren $(x; x) \in M \times M$. Die Identitätsrelation ist reflexiv.

Beispiel 1: Die Identitätsrelation in $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ lautet:

$$J_M = \{(-2; -2), (-1; -1), (0; 0), (1; 1), (2; 2)\}.$$

Beispiel 2: Die Identitätsrelation in \mathbb{N} lautet: $J_{\mathbb{N}} = \{(x; y) \mid x = y\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

5.4 Symmetrische, asymmetrische und identitive Relationen

(i) Eine Relation R in einer Menge M heißt *symmetrisch*, wenn aus $a R b$ stets $b R a$ folgt.

Beispiel: Die Zugehörigkeit zu einer Berufsgruppe. $a L b$ sei die Relation "a und b sind Lehrer". Das ist gleichbedeutend mit "b und a sind Lehrer", also $b L a$.

Beispiel: Die Geschwister-Relation $s G t$, "s und t sind Geschwister". $s G t \Rightarrow t G s$.

(ii) Eine Relation R in einer Menge M heißt *asymmetrisch*, wenn $a R b$ stets $b R a$ ausschließt, d. h. wenn aus $a R b$ stets $\bar{b} R \bar{a}$ folgt.

Beispiel: Die Vater-Kind-Relation: $a V b$ schließt $b V a$ sicher aus.

(iii) Eine Relation R in einer Menge M heißt *antisymmetrisch* oder *identitiv*, wenn aus $a R b$ und $b R a$ stets $a = b$ folgt.

Beispiel: Aus den Teilmengenbeziehungen $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt stets die Gleichheit $A = B$.

5.5 Ordnungen und Äquivalenzen

Eine Relation, die asymmetrisch und transitiv heißt *Ordnungsrelation* oder kurz *Ordnung*.

Beispiel: Die Kleinerbeziehung stellt eine Ordnung dar. Asymmetrie: $x < y$ schließt $y < x$ aus; Transitivität: aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt *Äquivalenzrelation* oder kurz *Äquivalenz*.

Beispiel 1: Die Beziehung $g \parallel h$ (g ist parallel zu h) ist äquivalent zu $h \parallel g$. Reflexivität: $g \parallel g$, jede Gerade ist zu sich selbst parallel; Symmetrie: $g \parallel h \Rightarrow h \parallel g$; Transitivität: aus $g \parallel h$ und $h \parallel k$ folgt $g \parallel k$. Ein analoges Beispiel ist mit der Kongruenz von Figuren möglich.

Beispiel 2: Die Identitätsrelation ist ohnehin reflexiv, sie ist auch symmetrisch (aus $x = y$ folgt $y = x$) und wenn $y = x$ und $x = z$, so gilt auch $x = z$.