0.1 Ergänzungen zur formalen Logik

Zum Brückenkurs Mathematik, Quelle: hauptsächlich "Einführung in die Technische Informatik", FernUniversität Hagen

UND, ODER, NICHT etc.: Boolesche Funktionen

(1) Gegeben ist eine Menge X von Variablen: $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, hier $X = \{a, b\}$.
(2) Die Variablen können die Werte 0 oder 1 annehmen.
(3) Sie werden in *Booleschen Ausdrücken* miteinander verknüpft, hier $a \wedge b$.
(4) Werte für die Booleschen Ausdrücke sind 0 oder 1.

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bei einer Variablen, die die Werte 0 oder 1 annehmen kann, sind 4 Boolesche Funktionen möglich:

x	$\mathbf{f_0}$	$\mathbf{f_1}$	$\mathbf{f_2}$	$\mathbf{f_3}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 = 0$, Kontradiktion, Nie
$f_1 = x$, Identität
$f_2 = \bar{x}$, Negation
$f_3 = 1$, Tautologie, Immer

Bei zwei Variablen sind 16 Boolesche Funktionen möglich, die alle mit 1, 0, UND, ODER, NICHT vollständig darstellbar sind.

a	0	1	0	1	
b	0	0	1	1	
$\mathbf{f_0}$	0	0	0	0	$f_0 = 0$, Kontradiktion, Nie
$\mathbf{f_1}$	0	0	0	1	$f_1 = a \wedge b$, Konjunktion, UND
$\mathbf{f_2}$	0	0	1	0	$f_2 = \bar{a} \wedge b$, Inhibition
$\mathbf{f_3}$	0	0	1	1	$f_3 = b$, Identität
$\mathbf{f_4}$	0	1	0	0	$f_4 = a \wedge \bar{b}$, Inhibition
$\mathbf{f_5}$	0	1	0	1	$f_5 = a$, Identität
$\mathbf{f_6}$	0	1	1	0	$f_6 = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$, Antivalenz, EXOR
$\mathbf{f_7}$	0	1	1	1	$f_7 = a \vee b$, Disjunktion, ODER
$\mathbf{f_8}$	1	0	0	0	$f_8 = \overline{a \vee b}$, Peircefunktion, NOR $a \downarrow b$
$\mathbf{f_9}$	1	0	0	1	$f_9 = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$, Äquivalenz $a \leftrightarrow b$
$\mathbf{f_{10}}$	1	0	1	0	$f_{10} = \bar{a}$, Negation
$\mathbf{f_{11}}$	1	0	1	1	$f_{11} = \bar{a} \vee b$, Implikation $a \rightarrow b$
$\mathbf{f_{12}}$	1	1	0	0	$f_{12} = \bar{b}$, Negation
$\mathbf{f_{13}}$	1	1	0	1	$f13 = a \vee \bar{b}$, Implikation
$\mathbf{f_{14}}$	1	1	1	0	$f_{14} = \overline{a \wedge b}$, Shefferfunktion, NAND
$\mathbf{f_{15}}$	1	1	1	1	$f_{15} = 1$, Tautologie, Immer

Übungen

Die Inhibition $\bar{a} \wedge b$ läßt sich darstellen als $b \rightarrow \bar{a}$.
Die Inhibition $a \wedge \bar{b}$ läßt sich darstellen als $a \rightarrow \bar{b}$.
Die Äquivalenz $a \leftrightarrow b$ läßt sich darstellen als $(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$.
Die Implikation $a \rightarrow b$ läßt sich darstellen als $\bar{a} \vee b$.

Übungen

Vereinbarungsgemäß gilt stets "Negation vor Konjunktion vor Disjunktion".

Zeige die Kommutativität $a \wedge b = b \wedge a$.

a	**b**	**a ∧ b**	**b ∧ a**
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Die beiden letzten Spalten sind gleich. Analog zeigt man $a \vee b = b \vee a$.

Zeige die Distributivität $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

a	**b**	**c**	**b ∧ c**	**a ∨ (b ∧ c)**	**a ∨ b**	**a ∨ c**	**(a ∨ b) ∧ (a ∨ c)**
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Die 5. und die letzte Spalte sind gleich.

Weitere Übungen

Einselement: $a \wedge 1 = a$
$a \vee 0 = a$

Komplementgesetze: $a \vee \bar{a} = 1$
$a \wedge \bar{a} = 0$

Assoziativität: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Gesetz von de Morgan: $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$
$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

Absorptionsgesetze: $a \wedge (a \vee b) = a$
$a \vee (a \wedge b) = a$

Idempotenzgesetze:	$a \vee a = a$ $a \wedge a = a$
Reduktionen:	$a \vee (\bar{a} \wedge b) = (a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b) = a \vee b$ $a \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$
0-1-Gesetze:	$a \wedge 1 = a,\ \ a \wedge 0 = 0$ $a \vee 1 = 1,\ \ a \vee 0 = a$

Dualitätsprinzip

Die dargestellten Formeln zeigen das *Dualitätsprinzip*: Werden in einer wahren Aussage an allen Stellen die Operatoren $\vee$ und $\wedge$ sowie die Werte 0 und 1 vertauscht, so erhält man eine weitere wahre Aussage. Man sagt, die Aussagen seine *dual* zueinander.

All- und Existenzaussagen

Beispiel für eine Allaussage: Alle Hunde, die scharfe Zähne haben, beißen Briefträger.
Allgemeine Form: Alle x, die die Eigenschaft E haben, haben die Eigenschaft F.

Wesentlich daran ist, daß eine Aussage über *alle* Elemente einer (näher bezeichneten) Menge gemacht wird, daher der Begriff *Allaussage*.

Eine Verneinung (Negation) erhält man nicht durch die Aussage, daß diese Hunde keine Briefträger beißen, sondern durch eine Verneinung des "alle": es existiert ein Hund, auf den die Aussage nicht zutrifft:

Es gibt einen Hund mit scharfen Zähnen, der keine Briefträger beißt.
Es gibt ein x, das die Eigenschaft E besitzt, nicht aber die Eigenschaft F.

Bei derartigen *Existenzaussagen* ist zu beachten:

(a) "Es gibt ein x mit der Eigenschaft E" bedeutet, daß es *mindestens* ein solches x gibt.
(b) Eine weitere mögliche Aussage ist: "Es gibt *höchstens* ein x mit der Eigenschaft E"
(c) Beide Aussagen zusammen bedeuten, daß es *genau* ein solches x gibt.

Die logischen Zeichen sind der Allquantor

$$\forall\, x\text{: E}$$

(d. h. alle x haben die Eigenschaft E) und der Existenzquantor

$$\exists\, x\text{: E}$$

(d. h. es gibt ein x mit der Eigenschaft E).

Umformung logischer Ausdrücke

Seien a, b, c *logische Variablen, dann gelten folgende Regeln* (Ganz rechts: Kurzbezeichnungen der Regeln):

Negation der Negation	$\overline{\overline{a}} = a$	(CC)
Kommutativgesetze	$a \wedge b = b \wedge a$	($K\wedge$)
	$a \vee b = b \vee a$	($K\vee$)
Assoziativgesetze	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	($A\wedge$)
	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	($A\vee$)
Distributivgesetze	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	($D\wedge$)
	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	($D\vee$)
Idempotenzgesetze	$a \wedge a = a$	($I \wedge$)
	$a \vee a = a$	($I \vee$)
Komplementgesetze	$a \wedge \overline{a} = 0$	($C\wedge$)
	$a \vee \overline{a} = 1$	($C\vee$)
0-1-Gesetze	$a \wedge 1 = a, \; a \wedge 0 = 0$	($N\wedge$)
	$a \vee 1 = 1, \; a \vee 0 = a$	($N\vee$)
Absorptionsgesetze	$a \wedge (a \vee b) = a$	($Ab\wedge$)
	$a \vee (a \wedge b) = a$	($Ab\vee$)
	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a$	(Ab1)
	$(a \vee \overline{b}) \wedge b = a \wedge b$	(Ab2)
	$(a \wedge \overline{b}) \vee b = a \vee b$	(Ab3)
	$(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$	(Ab4)
De Morgansche Regel	$(\overline{a \wedge b}) = \overline{a} \vee \overline{b}$	($M\wedge$)
	$(\overline{a \vee b}) = \overline{a} \wedge \overline{b}$	($M\vee$)

Beispiele:

(1) $(\overline{a} \vee b)\, \overline{ab}\, \mathbf{(}\, (\overline{a} \vee b)(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (ca \vee \overline{c}) \mathbf{)}$

$= (\overline{a} \vee b)\, (\overline{a} \vee \overline{b})\, \mathbf{(}(\overline{a} \vee b)(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (ca \vee \overline{c}) \mathbf{)}$	($M\wedge$)
$= \overline{a} \quad \mathbf{(}(\overline{a} \vee b)(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (ca \vee \overline{c}) \mathbf{)}$	(Ab4)
$= \overline{a} \quad \mathbf{(}\overline{a} \vee (ca \vee \overline{c}) \mathbf{)}$	(Ab4)
$= \overline{a}$	($Ab\wedge$)

(2) $x \vee yz \vee (\overline{x} \wedge \overline{yz})$

$= yz \vee x \vee (\overline{x} \wedge \overline{yz})$	($K\vee$)
$= yz \vee (x \vee \overline{x}) \wedge (x \vee \overline{yz})$	($D\vee$)
$= yz \vee 1 \wedge (x \vee \overline{yz})$	($C\vee$)
$= yz \vee (x \vee \overline{yz})$	($N\wedge$)
$= yz \vee \overline{yz} \vee x$	($A\vee$, $K\vee$)
$= 1 \vee x$	($C\vee$)
$= 1$	($N\vee$)